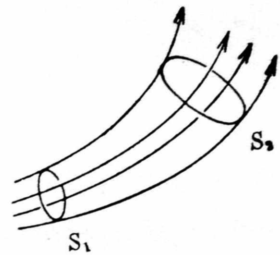
elektrické pole v okolí bodových elektrických nábojov $q_1 = 10$ jedn. a $q_2 = -15$ jedn. vo vzájomnej vzdialenosti 6 cm, sú rezy ekvipotenciálnych hladín nákresnou rovinou vytiahnuté čiarkovane, siločiary plne.

Keď je pole znázornené pomocou ekvipotenciálnych hladín, elektrický potenciál vo zvolenom bode poľa určíme interpoláciou medzi susednými na obrázku vyznačenými ekvipotenciálnymi hladinami, intenzitu, opierajúc sa o vzťah $\mathbf{E} = -\text{grad } V$, tak, že rozdiel potenciálov susedných ekvipotenciálnych hladín rozdelíme ich vzájomnou vzdialenosťou. Smer intenzity $\mathbf{E}$ je od vyššej k nižšej ekvipotenciálnej hladine.

Zobrazenie elektrického poľa pomocou siločiar, aj keď je názornejšie, je menej dokonalé. Možno z neho určiť len intenzitu poľa, keď postupujeme podľa tejto úvahy:



Obr. 1.8.

Siločiary idúce obvodom zvolenej plôšky (*obr. 1.8*) tvoria *silovú trubicu.* Keď medzi jej na siločiary kolmými rezmi s plošnými obsahmi S_1 a S_2 nie sú náboje, podľa Gaussovej vety výtok elektrickej intenzity cez tieto rezy silovej trubice, keďže plášť silovej trubice k výtoku neprispieva, rovná sa nule. Preto keď E_1 je absolútna hodnota intenzity poľa v mieste rezu s plošným obsahom S_1 a E_2 v mieste rezu s plošným obsahom S_2, vtedy $-E_1S_1 + E_2S_2 = 0$, alebo $E_1S_1 = E_2S_2$, t. j.

$$E_1 : E_2 = S_2 : S_1$$

Hustota siločiar (počet vyznačených siločiar, prechádzajúcich plošnou jednotkou, kolmou na siločiary) h je však tiež nepriamo úmerná plochám S_1 a S_2,

$$h_1 : h_2 = S_2 : S_1$$

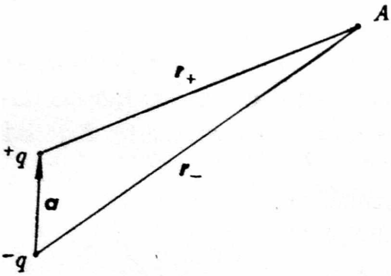
takže

$$E_1 : E_2 = h_1 : h_2$$

Ak teda v jednom reze silovej trubice sa hustota siločiar číselne rovná intenzite poľa, je tento vzťah splnený pre ľubovoľný iný rez.

1.5. Pole dipólu a elektrickej dvojvrstvy. Elektrickým dipólom sa vo fyzike nazýva dvojica bodových elektrických nábojov opačného znamienka, avšak rovnakej abs. hodnoty q, ktorých vzájomná vzdialenosť a je malá v porovnaní s ich vzdialenosťou od bodov, v ktorých vyšetrujeme ich silové účinky. Keď polohový vektor kladného pólu dipólu vzhľadom na záporný pól je $\mathbf{a}$, súčin $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ sa nazýva *moment dipólu.* Priamka určená obidvoma pólmi dipólu sa volá *os* dipólu.

Rozloženie potenciálu a intenzity v elektrickom poli dipólu vyšetríme tak, že potenciál ako funkciu polohy bodu v okolí dipólu určíme priamo a intenzitu určíme potom ako záporný gradient potenciálu. Podľa vzorca (1.3.8) v bode A, ktorého vzdialenosti od záporného a kladného pólu dipólu sú r_- a r_+ (*obr. 1.9*), elektrický potenciál je



Obr. 1.9.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_+}{r_+} + \frac{q_-}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

Rozdiel $\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$ pri pevnej polohe bodu A sa rovná zmene funkčnej hodnoty funkcie $\frac{1}{r}$, zodpovedajúcej prechodu zo záporného pólu dipólu do pólu kladného. Pre tento rozdiel, keďže podľa predpokladu vzájomná vzdialenosť a obidvoch pólov dipólu je malá, môžeme písať: $\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = $ $= \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = \boldsymbol{a} \,.\, \mathrm{grad}\,\frac{1}{r}$. Zvoľme záporný pól dipólu za začiatok pravouhlého súradnicového systému, v ktorom súradnice bodu A nech sú x_0, y_0, z_0 a súradnice bodu v blízkom okolí začiatku x, y, z. Potom

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$$

a

$$\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\,\mathrm{grad}\,r = -\frac{1}{r^2}\,\mathrm{grad}\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left(-\boldsymbol{i}\,\frac{x_0 - x}{r} - \boldsymbol{j}\,\frac{y_0 - y}{r} - \boldsymbol{k}\,\frac{z_0 - z}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

pričom, pri použití tohto výsledku pre začiatok súradnicového systému, $\boldsymbol{r}$ značí polohový vektor bodu A vzhľadom na tento začiatok, t. j. vzhľadom na záporný pól dipólu, alebo — čo je prakticky to isté — vzhľadom na jeho stred. Pomocou získaných vzťahov výraz vyjadrujúci potenciál v okolí dipólu môžeme upraviť na jednoduchý tvar

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{q\boldsymbol{a}}{4\pi\varepsilon_0}\,.\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = \frac{\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1}$$

Podľa tohto výsledku abs. elektrický potenciál v okolí dipólu rovná sa nule vo všetkých bodoch roviny súmernosti dipólu, kde je $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{p}$, pozdĺž priamky zvoleného smeru sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti od dipólu a v rovnakých vzdialenostiach je najväčší na kladnej strane osi dipólu, kde je $\boldsymbol{r} /\!/ \boldsymbol{p}$.

Vzorec pre intenzitu poľa dipólu nájdeme utvorením záporného gradientu výrazu (1). Dostávame:

$$\boldsymbol{E} = -\text{grad}\, V = -\nabla \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(\text{grad}\, \frac{1}{r^3} \right) (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}) + \frac{1}{r^3}\, \text{grad}\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}) \right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(-3 \frac{\boldsymbol{r}}{r^5} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} + \frac{1}{r^3} \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{p} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{r^3} \right) \cdot \boldsymbol{p} \tag{2}$$

Podľa vzorca (2) intenzita v rovine súmernosti dipólu ($\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{p}$) je

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{3}$$

a na osi dipólu ($\boldsymbol{r} // \boldsymbol{p}$)

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3rr\boldsymbol{p}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} \right) = \frac{\boldsymbol{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{4}$$

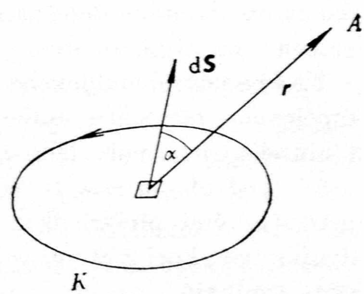
Keď sa dipól nachodí vo vonkajšom elektrickom poli a v mieste jeho kladného (záporného) pólu intenzita poľa je $\boldsymbol{E}_2$ ($\boldsymbol{E}_1$), účinkuje na dipól celková sila

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = q\boldsymbol{a} \cdot \text{grad}\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} \cdot \text{grad}\, \boldsymbol{E} \tag{5}$$

pričom celkový moment síl $q\boldsymbol{E}_2$ a $-q\boldsymbol{E}_1$ napríklad vzhľadom na záporný pól dipólu je

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a} \times q\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita poľa v mieste dipólu. Podľa týchto výsledkov v homogénnom elektrickom poli (grad $\boldsymbol{E} = 0$) na dipól účinkuje len dvojica síl s momentom $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$, ktorá sa snaží natočiť dipól tak, aby jeho os bola súhlasne rovnobežná so siločiarami; v nehomogénnom silovom poli účinkuje však na dipól aj výsledná sila $\boldsymbol{p} \cdot \text{grad}\, \boldsymbol{E}$.



Obr. 1.10.

Elektrickou dvojvrstvou nazýva sa veľmi tenká, všade rovnako hrubá vodivá alebo nevodivá vrstva, ktorá na svojej jednej strane nesie elektrický náboj s konštantnou plošnou hustotou σ a na druhej strane náboj s rovnakou hustotou, avšak opačného znamienka. Keď hrúbka vrstvy je a, jej plošný element $\mathrm{d}S$ sa môže zrejme považovať za elementárny dipól s momentom $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}\sigma\, \mathrm{d}S = \sigma a\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Keď tzv. *plošnú hustotu dipólového momentu* v dvojvrstve σa označíme písmenom h, takže bude $\sigma a = h$, tento moment bude tiež $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sigma a\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = h\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, pričom elementárny plošný vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je orientovaný na kladnú stranu dvojvrstvy. Podľa vzorca (1) pre potenciál v bode A v okolí dvojvrstvy, ktorá je ohraničená v sebe uzavretou krivkou K, môžeme písať (*obr. 1.10*):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{r}\,.\,h\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^3} = \frac{h}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{r}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r_3} = \frac{h}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r\,(\cos\alpha)\,\mathrm{d}S}{r^3}$$

Súčin $(\cos\alpha)\,\mathrm{d}S$, ak z bodu A vidíme kladnú stranu dvojvrstvy, takže uhol α je ostrý, môžeme pokladať za priemet elementárnej plôšky dvojvrstvy s abs. hodnotou $\mathrm{d}S$ do roviny kolmej na príslušný polohový vektor bodu A. Preto keď plôšku $\mathrm{d}S$ vidíme z bodu A pod zorným uhlom $\mathrm{d}\omega$, môžeme písať: $(\cos\alpha)\,\mathrm{d}S = r^2\,\mathrm{d}\omega$. Podľa týchto výsledkov potenciál v bode A v okolí dvojvrstvy, keď z bodu A vidieť kladnú stranu dvojvrstvy, je

$$V = \frac{h}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\omega = \frac{\omega h}{4\pi\varepsilon_0}$$

Keby však z bodu A bolo vidieť zápornú stranu dvojvrstvy, súčin $\cos\alpha\,\mathrm{d}S$ by bol zrejme $-r^2\,\mathrm{d}\omega$, takže potenciál v tomto prípade by bol $V = -\dfrac{\omega h}{4\pi\varepsilon_0}$.

Vo všeobecnosti potenciál v okolí elektrickej dvojvrstvy je teda

$$V = \pm\frac{\omega h}{4\pi\varepsilon_0} \tag{7}$$

kde $h = a\sigma$ je abs. hodnota plošnej hustoty dipólového momentu v dvojvrstve, ω zorný uhol, pod ktorým vidíme dvojvrstvu z bodu, v ktorom vzorec (7) potenciál určuje, a platí znamienko kladné alebo záporné podľa toho, či z príslušného miesta vidieť kladnú alebo zápornú stranu dvojvrstvy.

Pri prechode cez rovinnú dvojvrstvu zmení sa zorný uhol (braný už so znamienkom kladným alebo záporným) o $\pm 4\pi$. Pri prechode cez elektrickú dvojvrstvu z jej zápornej strany na stranu kladnú zmení sa teda potenciál o h/ε_0.

Keď na povrchu nejakého telesa je elektrická dvojvrstva s plošnou hustotou dipólového momentu všade rovnako veľkou, v okolí telesa nie je napriek tomu elektrické pole, lebo z ľubovoľného bodu okolia telesa časť dvojvrstvy vidieť pod uhlom ω a zvyšok pod uhlom $-\omega$. Pre túto príčinu nemožno sa jednoduchými prostriedkami presvedčiť o existencii takýchto elektrických dvojvrstiev, hoci z atomistickej stavby hmoty vyplýva, že takéto dvojvrstvy vždy vznikajú.

Podľa vzorca (7) intenzita elektrického poľa v okolí dvojvrstvy, keď uhol ω berieme už aj s príslušným znamienkom, je

$$\boldsymbol{E} = -\frac{h}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{grad}\,\omega \tag{8}$$

Iné vyjadrenie intenzity elektrického poľa v okolí dvojvrstvy vyplýva priamo zo vzorca (2), ktorý bezprostredne vyjadruje intenzitu elektrického poľa len v okolí dipólu. Keď v tomto vzorci dipólový moment $\boldsymbol{p}$ nahradíme dipólovým momentom $h\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ plošného elementu dvojvrstvy, integráciou takto získaného výrazu po celej ploche dvojvrstvy dostávame:

$$\boldsymbol{E} = \frac{h}{4\pi\varepsilon_0} \int \left(\frac{3\boldsymbol{rr}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{r^3} \right) . \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9}$$

Podľa vzorcov (5) a (9) elektrická dvojvrstva s plošnou hustotou dipólového momentu h účinkuje na inú dvojvrstvu s plošnou hustotou dipólového momentu h' silou

$$\boldsymbol{f} = \int_{S'} h'\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}' \,.\, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{E} = h' \int_{S'} \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \,.\, \mathrm{grad} \frac{h}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \left(\frac{3\boldsymbol{rr}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{r^3} \right) . \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= \frac{hh'}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \,.\, \int_S \nabla \left(\frac{3\boldsymbol{rr}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{r^3} \right) . \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{10}$$

1.6. Vodič v elektrickom poli. O vodičoch elektriny vieme, že obsahujú elektrické náboje, ktoré sú v nich aspoň čiastočne voľne pohyblivé. V kovoch sú to elektróny, ktorých náboj v elektricky neutrálnom stave kovu je kompenzovaný kladnými nábojmi viazanými na kryštálovú mriežku telesa. V elektricky vodivých roztokoch a plynoch sú to aj kladné a záporné ióny. Vo vnútri vodiča v ustálenom stave, aj keď sa vodič nachádza vo vonkajšom elektrickom poli, intenzita elektrostatického poľa sa všade rovná nule, lebo inakšie by sa v ňom elektrický náboj pohyboval: kladný v smere intenzity záporný proti smeru intenzity. Ale $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, V$, teda vo vnútri vodiča v ustálenom stave je grad $V = 0$, t. j. $V = \mathrm{const.}$ *Vo vnútri vodiča v ustálenom stave má elektrický potenciál všade rovnakú hodnotu, akú má na povrchu vodiča.*

Keďže vo vnútri vodiča v ustálenom stave je $\boldsymbol{E} = 0$, i výtok vektora $\boldsymbol{E}$ z vnútra na vonkajšiu stranu ľubovoľnej vo vnútri vodiča myslenej uzavretej plochy sa rovná nule, teda — podľa Gaussovej vety — vo vnútri vodiča v ustálenom stave niet vcelku elektrického náboja. Elektrický náboj sídli len na povrchu vodiča. Smer intenzity elektrického poľa v okolí vodiča je kolmý na povrch vodiča, ktorý je ekvipotenciálnou hladinou.

Obklopme plošný element $\mathrm{d}S$ povrchu vodiča, ktorý sa nachádza vo vákuu, nízkym valcom (*obr. 1.11*). V jeho mieste nech je plošná hustota náboja σ. Výtok vektora $\boldsymbol{E}$ cez povrch tohto valca sa rovná, podľa vety Gaussovej, náboju vo vnútri valca, delenému permitivitou vákua ε_0. K celkovému toku