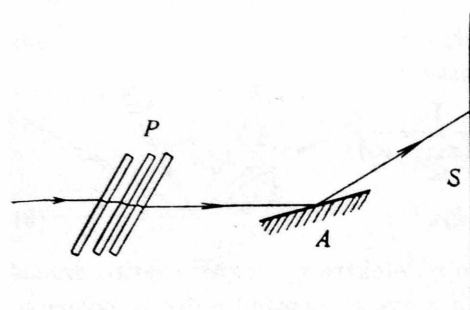


zátor a zrkadlo  $Z_2$  analyzátor. Pri otočení zrkadla  $Z_2$  okolo priamky  $AB$  raz odrazeného svetelného lúča o  $360^\circ$  svetelná stopa na stene  $S$  je dvakrát relatívne najsvetlejšia a dvakrát najtemnejšia. Pri polohe zrkadla  $Z_2$  podľa obr. 14.4 je svetelná stopa na stene relatívne najsvetlejšia.



Obr. 14.5.

Polarizáciu svetla lomom možno študovať pomocou zariadenia, v ktorom polarizátor je súprava planoparalelných sklenených doštičiek  $P$  (obr. 14.5) a analyzátorom opäť zrkadlo  $A$ .

Poznámka: V niektorej literatúre pod rovinou polarizácie polarizovaného svetla sa rozumie nie rovina vektora  $\mathbf{E}$ , ale vektora  $\mathbf{H}$ . Pri polarizácii svetla odrazom je to teda rovina dopadu svetla, a nie rovina na rovinu dopadu kolmá.

**14.3. Polarizácia svetla dvojlomom.** Maxwellove rovnice napísané pre homogénne a izotropné nevodivé prostredie.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

sú splnené aj v prostredí anizotropnom, len veličiny  $\epsilon$  a  $\mu$ , vystupujúce v rovniciach:

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (2)$$

v prípade anizotropného prostredia nie sú už skalárne konštanty, ale symetrické tenzory druhého stupňa. Anizotropné prostredia sú však prakticky len dielektricky anizotropné a okrem toho ich skalárna magnetická permeabilita sa približne rovná permeabilite vákuu, takže namiesto rovníc (2) možno písať aj rovnice:

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3)$$

Dosadením týchto vzťahov do rovníc (1) vychádza:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\epsilon \cdot \mathbf{E}) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4)$$

Hľadáme podmienky, ktoré v anizotropnom prostredí, napr. v anizotrop-

nom monokryštáli, splňuje lineárne polarizované svetelné vlnenie, určené rovnicami:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 f\left(t - \frac{n}{v}\right), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 g\left(t - \frac{n}{v}\right) \quad (5)$$

v ktorých  $n$  značí vzdialenosť bodu od pevnej roviny a  $v$  rýchlosť postupu svetelnej vlny. Podľa týchto rovníc je:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon \cdot \mathbf{E}_0 \frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{D}_0 \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{B}_0 \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_0 f\left(t - \frac{n}{v}\right) = \left[ \text{grad } f\left(t - \frac{n}{v}\right) \right] \times \mathbf{E}_0 =$$

$$= -\frac{n}{v} f' \left(t - \frac{n}{v}\right) \times \mathbf{E}_0 = -\frac{n}{v} \frac{\partial f}{\partial t} \times \mathbf{E}_0$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{n}{v} \frac{\partial g}{\partial t} \times \mathbf{B}_0$$

Tieto výsledky dosadené do posledných dvoch Maxwellových rovníc (4) dávajú:

$$-\frac{n}{v} \frac{\partial f}{\partial t} \times \mathbf{E}_0 = -\mathbf{B}_0 \frac{\partial g}{\partial t}$$

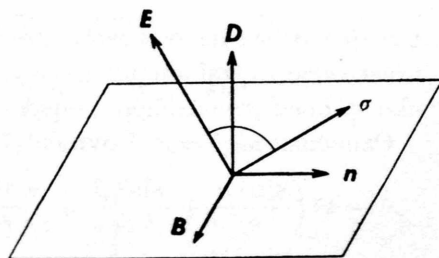
po integrácii. j. podľa času

$$\mathbf{B} = \frac{n}{v} \times \mathbf{E} \quad (a)$$

a

$$-\frac{n}{v} \frac{\partial g}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{D}_0 \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{n}{\mu_0 v} \times \mathbf{B} \quad (b)$$



Obr. 14.6.

Priestorové usporiadanie vektorov  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{E}$ , vyplývajúce z výsledkov (a) a (b), vyjadruje obr. 14.6: vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{n}$  ležia v jednej rovine, na ktorú je vektor  $\mathbf{B}$  kolmý.

Spojením výsledkov (a) a (b) vychádza:

$$\epsilon \cdot \mathbf{E} = -\frac{n}{\mu_0 v} \times \left( \frac{n}{v} \times \mathbf{E} \right) = -\frac{1}{\mu_0 v^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{nn} - \mathbf{E})$$

alebo

$$(\mu_0 v^2 \epsilon + \mathbf{nn} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6)$$

kde  $\mathbf{I}$  je tenzor identity.

Predstavme si tenzor  $\mu_0 v^2 \epsilon + nn - I$  napísaný v tvare dvojitého súčtu  $\sum_m \sum_n a_{mn} i_m i_n$  a napíšeme aj vektor  $E$  ako súčet  $\sum_k E_k i_k$ . Rovnicu (6) môžeme potom písať takto:

$$\sum_m \sum_n a_{mn} i_m i_n \cdot \sum_k E_k i_k = 0$$

alebo

$$\sum_m i_m \sum_n a_{mn} E_n = 0$$

Pretože táto rovnica je rovnocenná s tromi skalárnymi rovnicami

$$a_{m1} E_1 + a_{m2} E_2 + a_{m3} E_3 = 0$$

v ktorých je postupne  $m = 1, 2, 3$  znamená to, že determinant  $d$  súradníc tenzora z rovnice (6) sa rovná nule, lebo podľa poslednej rovnice stĺpce tohto determinantu sú od seba lineárne závislé.

Zvoľme za osi pravouhlého súradnicového systému osi elipsoidu tenzora  $\epsilon$ , takže bude  $\epsilon = \epsilon_1 ii + \epsilon_2 jj + \epsilon_3 kk$ , a smerové uhly vektora  $n$  označme  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$ . Rovnica  $d = 0$  potom bude:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 v^2 \epsilon_1 - \sin^2 \alpha, & \cos \alpha \cos \beta, & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \alpha, & \mu_0 v^2 \epsilon_2 - \sin^2 \beta, & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \alpha, & \cos \gamma \cos \beta, & \mu_0 v^2 \epsilon_3 - \sin^2 \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Určuje možné rýchlosti svetla pre jednotlivé smery postupu svetelného vlnenia, určené smerovými uhlami  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$ . Pre  $v^2$  je to rovnica tretieho stupňa, avšak — ako sa hneď presvedčíme — jeden jej koreň sa rovná nule.

Označme:  $\mu_0 v^2 = x$ . Rovnicu (7) možno potom upraviť na tvar

$$x^3 - x^2 \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon_1} + \frac{\sin^2 \beta}{\epsilon_2} + \frac{\sin^2 \gamma}{\epsilon_3} \right) + x \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_2 \epsilon_3} + \frac{\cos^2 \beta}{\epsilon_3 \epsilon_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) = 0$$

takže vidíme, že jeden jej koreň sa skutočne rovná nule. Po jeho vypustení máme rovnicu

$$x^2 - x \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon_1} + \frac{\sin^2 \beta}{\epsilon_2} + \frac{\sin^2 \gamma}{\epsilon_3} \right) + \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_2 \epsilon_3} + \frac{\cos^2 \beta}{\epsilon_3 \epsilon_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) = 0 \quad (8)$$

Rovnicu určujúcu možné rýchlosti svetla napr. v smere osi  $X$  dostaneme voľbou  $\alpha = 0, \beta = \gamma = 90^\circ$ . Z rovnice

$$x^2 - x \left( \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_3} \right) + \frac{1}{\epsilon_2 \epsilon_3} = 0$$

vyplýva, že  $x_1 = \frac{1}{\epsilon_2}, x_2 = \frac{1}{\epsilon_3}$ , teda  $v_{x1} = \sqrt{\frac{x_1}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_2 \mu_0}} = b, v_{x2} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_3 \mu_0}} =$

$= c$ . Pre rýchlosti v smeroch osí  $Y$  a  $Z$  by sme dostali  $v_{y1} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_3\mu_0}} = c$ ,  $v_{y2} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1\mu_0}} = a$  a  $v_{z1} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1\mu_0}} = a$ ,  $v_{z2} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2\mu_0}} = b$ . Rýchlosti  $a$ ,  $b$  a  $c$  sú tzv. *hlavné rýchlosti* lineárne polarizovanej rovinnej svetelnej vlny v homogénnom a anizotropnom nevodivom prostredí.

Keď tzv. *hlavné skalárne permitivity*  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  a  $\varepsilon_3$ , vystupujúce v rovnici (8), vyjadríme pomocou rýchlostí  $a$ ,  $b$  a  $c$  a súčasne za  $x$  napíšeme opäť  $\mu_0 v^2$ , dostaneme rovnicu

$$(v^2)^2 - v^2[a^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + b^2(\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) + c^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)] + (b^2c^2 \cos^2 \alpha + c^2a^2 \cos^2 \beta + a^2b^2 \cos^2 \gamma) = 0$$

ktorú možno upraviť na tvar

$$\frac{\cos^2 \alpha}{a^2 - v^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2 - v^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2 - v^2} = 0 \quad (9)$$

Rovnica (9) je najčastejšie používaným vyjadrením *Fresnelovho zákona* rýchlostí svetla v anizotropných kryštáloch, podľa ktorého v anizotropnom priehladnom prostredí v každom smere môžu postupovať dve lineárne polarizované svetelné vlnenia vo všeobecnosti s nerovnakými rýchlosťami  $v_1$  a  $v_2$ . Nájdeme smery príslušných elektrických vektorov  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$ .

Rovnicu (6), keď v nej tenzor  $\epsilon$  vyjadríme pomocou hlavných rýchlostí  $a$ ,  $b$  a  $c$ ,

$$\epsilon = \varepsilon_1 \mathbf{ii} + \varepsilon_2 \mathbf{jj} + \varepsilon_3 \mathbf{kk} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mathbf{ii}}{a^2} + \frac{\mathbf{jj}}{b^2} + \frac{\mathbf{kk}}{c^2} \right)$$

môžeme upraviť na tvar

$$\left[ v^2 \left( \frac{\mathbf{ii}}{a^2} + \frac{\mathbf{jj}}{b^2} + \frac{\mathbf{kk}}{c^2} \right) + \mathbf{nn} - \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{E} = 0$$

alebo

$$v^2 \left( \frac{E_x \mathbf{i}}{a^2} + \frac{E_y \mathbf{j}}{b^2} + \frac{E_z \mathbf{k}}{c^2} \right) + (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$$

Táto rovnica je rovnocenná s troma rovnicami skalárnymi

$$E_x \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \cos \alpha$$

$$E_y \left( 1 - \frac{v^2}{b^2} \right) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \cos \beta$$

$$E_z \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \cos \gamma$$

z ktorých vyplýva:

$$E_x : E_y : E_z = \frac{a^2 \cos \alpha}{a^2 - v^2} : \frac{b^2 \cos \beta}{b^2 - v^2} : \frac{c^2 \cos \gamma}{c^2 - v^2} \quad (10)$$

Smery vektorov  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$  dostaneme, keď do poslednej rovnice za rýchlosť  $v$  dosadíme postupne rýchlosti  $v_1$  a  $v_2$ , určené rovnicou (9). Tým sú určené aj smery vektorov  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{B}$ , lebo už vieme (pozri obr. 13.15), že vektor  $\mathbf{B}$  je na rovinu vektorov  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{n}$  kolmý a vektor  $\mathbf{D}$  je v rovine vektorov  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{n}$  a je v nej na vektor  $\mathbf{n}$  kolmý.

Dokážeme ešte, že polarizačné roviny lineárne polarizovaných svetelných vlnení, ktoré v anizotropnom nevodivom prostredí môžu postupovať v tomže smere, sú na seba kolmé. Dôkaz vykonáme tak, že dokážeme, že príslušné vektory  $\mathbf{D}_1$  a  $\mathbf{D}_2$  sú na seba kolmé.

Z rovnice (6) vyplývajú rovnice:

$$\mu_0 v_1^2 \mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{n}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n})$$

$$\mu_0 v_2^2 \mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2 - \mathbf{n}(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n})$$

Pretože vektory  $\mathbf{D}_1$  a  $\mathbf{D}_2$  sú na vektor  $\mathbf{n}$  kolmé, skalárnym vynásobením týchto rovníc vektormi  $\mathbf{D}_2$  a  $\mathbf{D}_1$  a odpočítaním vyplýva z nich rovnica

$$\mu_0(v_1^2 - v_2^2)(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_1$$

Avšak pravá strana tejto rovnice sa rovná nule, lebo

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_2 \cdot (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_1) = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_1$$

čím sme dokázali, že pri podmienke  $v_1 \neq v_2$  je  $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0$ , teda vektory  $\mathbf{D}_1$  a  $\mathbf{D}_2$  sú na seba kolmé.

Všetky v tomto článku z Maxwellových rovníc odvodené a s pozorovaním veľmi dobre sa zhodujúce výsledky môžeme zhrnúť takto: *V anizotropných kryštáloch v zvolenom smere môžu nerovnakými rýchlosťami postupovať len dve lineárne polarizované svetelné vlnenia, ktorých polarizačné roviny sú na seba kolmé.*

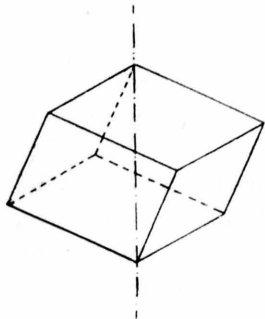
Poznámka: V svetelnom vlnení v anizotropnom prostredí treba rozlišovať *smier postupu svetelnej vlny*, určený normálou vlnoplochy, a *smier svetelného lúča*, t. j. smer postupu svetelnej energie určený žiarivým vektorom  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

Okolnosť, že v anizotropnom prostredí v náhodilom smere môžu postupovať len lineárne polarizované svetelné vlnenia, má za následok, že pri dopade svetelného lúča na rozhranie izotropného a anizotropného priehľadného prostredia nastáva jeho rozštiepenie na dva lineárne polarizované svetelné lúče. Jav, najznámejší a najvýraznejší pri islandskom vápenci, nazýva sa *dvojlom*.

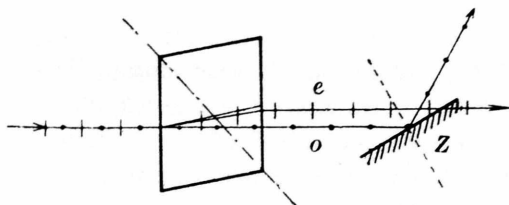
Kryštály islandského vápence patria do sústavy trigonálnej a majú tvar klenca (obr. 14.7). Keď dopadá nepolarizovaný svetelný lúč kolmo na niektorú prirodzenú plochu kryštálu islandského vápence, nastáva jeho rozštiepenie na

lúč *riadny* (ordinárny, *o*) a *mimoriadny* (extraordinárny, *e*) spôsobom znázorneným na obr. 14.8, na ktorom bodky a čiarky označujú priamky vektora **E**.

O polarizácii obidvoch lúčov sa môžeme presvedčiť pomocou zrkadla *Z*, slúžiaceho za analyzátor, na ktoré obidva lúče dopadajú pod Brewsterovým uhlom. Pri polohe zrkadla *Z* znázornenej na obr. 14.7 nastáva odraz len riadneho lúča, po pootočení zrkadla *Z* o  $90^\circ$  okolo priamky rovnobežnej so smerom na zrkadlo dopadajúcich lúčov nastáva odraz len lúča mimoriadneho.

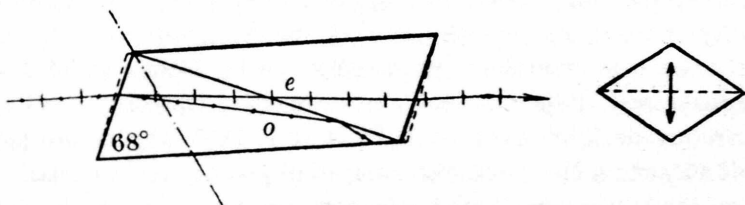


Obr. 14.7.



Obr. 14.8.

Islandský vápenec, podobne ako všetky kryštály sústavy štvorcovej, trigonálnej a hexagonálnej, vyznačujú sa tým, že elipsoid ich dielektrického tenzora  $\epsilon$  je rotačný, čo znamená, že pri nich  $\epsilon_2 = \epsilon_3$ . Takéto kryštály sa nazývajú *opticky jednoosovými*. Ich optická os je totožná s ich osou kryštalografickou. Vyznačuje sa tým, že pri kolmom dopade svetla na doštičku vybrúsenú z kryštálu kolmo na optickú os nenastáva dvojlom. Kryštály patriace do sústavy kosoštvorcovej, jednoklonnej a trojklonnej majú dve optické osi. Sú to priamky kolmé na kruhové rezy trojosových elipsoidov ich dielektrických tenzorov  $\epsilon$ .



Obr. 14.9.

Dvojlom v islandskom vápenci sa používa na zhotovovanie rôznych polarizačných hranolov. Najznámejší z nich je tzv. *nikol*, ktorý zhotovil r. 1828 W. Nicol (obr. 14.9). Klenec z islandského vápenca sa zbrúsi z uhla  $71^\circ$  na  $68^\circ$  a rozreže na dve polovice, ktoré sa potom zlepiť kanadským balzomom. Takto vytvorené rozhranie z obidvoch dvojlomom pri vstupe svetla do hranolu vzniknutých lúčov prepúšťa len lúč mimoriadny, zatiaľ čo lúč riadny sa totálnou reflexiou na prechode do kanadského balzamu, prostredia opticky redšieho, odráža nabok.