čiže ak platí nerovnosť

$$\Delta x \geqq \lambda$$

To značí, že aj súradnice bodu možno určiť len s touto presnosťou. Aby však voľne sa pohybujúcu časticu bolo vôbec možné zbadať v zornom poli mikroskopu, musí byť zasiahnutá aspoň jedným fotónom, ktorého hybnosť je $\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$. Tým sa však hybnosť častice mení. Z podrobnejšieho rozboru tejto okolnosti vyplýva, že nepresnosť Δp_x v určení zložky hybnosti rovná sa alebo je väčšia ako hybnosť fotónu použitého k pozorovaniu, teda

$$\Delta p_x \geqq \frac{h}{\lambda}$$

Podľa týchto vzťahov pri používaní svetla s malou vlnovou dĺžkou možno s veľkou presnosťou určiť polohu, ale len s malou presnosťou hybnosť a opačne, pričom pre súčin obidvoch nepresností platí *Heisenbergov vzťah neurčitosti*

$$\Delta x \, \Delta p_x \geqq h \qquad (1)$$

Podobný vzťah odvodil Heisenberg aj pre súčin neurčitosti určenia energie ε, napr. fotónu, a okamihu jej uvoľnenia t

$$\Delta \varepsilon \, \Delta t \geqq h \qquad (2)$$

17.12. Boseho—Einsteinova štatistika. Rozdeliť n od seba rozoznateľných elementov do k od seba rozoznateľných oddelení možno rozličným spôsobom. V Maxwellovej—Boltzmannovej štatistike, s ktorou sme sa zaoberali v termike, rozdelenie (*makrostav*) sa považuje za určené počtom n_i elementov v jednotlivých oddeleniach a tzv. *štatistická* alebo aj *termodynamická pravdepodobnosť* daného rozdelenia sa definuje počtom jeho možných realizácií (*mikrostavov*). Vyjadruje ju vzorec

$$W = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \, n_3! \, \ldots \, n_k!} \qquad (1)$$

Z takto definovaného rozdelenia a jeho pravdepodobnosti vyplývajúce dôsledky sa veľmi dobre osvedčujú v kinetickej teórii zriedených plynov, nie však už pri ich použití napr. pre elektrónový plyn v kovoch alebo na fotóny v dutine pevného telesa. Tieto príčiny viedli indického fyzika Š. Boseho (*1894) k inej definícii rozdelenia a tým aj jeho pravdepodobnosti, ktorej hlbší význam našiel až A. Einstein.

V Maxwellovej—Boltzmannovej štatistike sa atómy považujú za útvary individuálne jestvujúce, takže má potom zmysel hovoriť o inej realizácii ich daného rozdelenia, keď medzi sebou vymeníme dva atómy, ktoré boli pôvodne v dvoch rozličných oddeleniach. Toto stanovisko podľa Boseho nie je vždy správne. Prehlásil preto rozdelenie n totožných elementov do k od seba rozoznateľných oddelení za definované nie počtom prvkov v oddeleniach, ale počtom oddelení obsahujúcich určitý počet prvkov. Príslušnú štatistickú pravdepodobnosť rozdelenia definoval tiež počtom jeho možných realizácií, avšak vychádzajúc z jeho novej definície.

Ozrejmíme si vec na príklade. Tri atómy možno rozdeliť do troch oddelení podľa tabuľky

Číslo oddelenia	Počty prvkov v oddeleniach									
	I			II						III
1	3	0	0	2	2	1	1	0	0	1
2	0	3	0	1	0	2	0	2	1	1
3	0	0	3	0	1	0	2	1	2	1
M.-B.	1	1	1	3	3	3	3	3	3	6
B.-E.	3			6						1

Podľa definície rozdelenia (makrostavu) v Maxwellovej—Boltzmannovej štatistike jestvuje 10 rozličných rozdelení 3 prvkov do 3 oddelení. Určujú ich čísla v stĺpcoch práve uvedenej tabuľky, naproti tomu v štatistike Boseho—Einsteinovej sú len 3 rozličné rozdelenia troch prvkov do troch oddelení. V tabuľke sú označené rímskymi číslicami. Príslušné pravdepodobnosti sú v posledných dvoch riadkoch.

Z uvedeného vyplýva, že pravdepodobnosť rozdelenia v Boseho—Einsteinovej štatistike je daná vzorcom

$$W = \frac{k!}{k_0!\, k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \tag{2}$$

kde k je počet oddelení. Napríklad k_i je počet oddelení, v ktorých je i prvkov.

Doteraz sme predpokladali, že všetky oddelenia sú rovnocenné. Uvažujme teraz rozdelenie n častíc do $k = \Sigma\, k_r$ oddelení vyznačujúcich sa tým, že energia častice závisí od toho, v ktorom oddelení sa nachádza. Pritom nech k_r značí teraz počet oddelení v skupine oddelení, v ktorých častica má energiu ε_r a k_{ri} počet oddelení v tejto skupine, v ktorých je i častíc. Jedno takéto rozdelenie pre $n = \sum_r \sum_i i k_{ri} = 33$ podáva tabuľka

r	k_{r0}	k_{r1}	k_{r2}	k_{r3}	k_{r4}	k_{r5}	k_{r6}	....	k_r
4	1	1	0	3	0	1	0	0	6
3	2	0	2	0	0	1	0	0	5
2	0	0	2	0	1	0	0	0	3
1	1	1	0	0	0	0	0	0	2

Keďže počet možných realizácií rozdelenia v r-tom riadku podľa predošlých úvah je:

$$W_r = \frac{k_r!}{k_{r0}!\, k_{r1}!\, k_{r2}! \dots k_{rn}!} \tag{3}$$

pravdepodobnosť rozdelenia všetkých n častíc do všetkých $k = \sum k_r$ oddelení podľa poučky o násobení pravdepodobností je:

$$W = W_1 W_2 W_3 \dots \tag{4}$$

Po týchto prípravných úvahách budeme hľadať také rozdelenie n častíc do $k = \Sigma\, k_r$ oddelení, ktoré sa vyznačuje najväčšou, vzorcom (4) danou pravdepodobnosťou. Pri riešení úlohy budeme predpokladať, že počet častíc n, ich celková energia E ako aj čísla k_r sú konštantné.

Zo vzorca (4), ak čísla k_r aj k_{ri} sú dosť veľké, vyplýva:

$$\ln W = \sum_r \ln W_r = \sum_r [k_r \ln k_r - k_r - \sum_i (k_{ri} \ln k_{ri} - k_{ri})] =$$
$$= \sum_r \sum_i (k_r \ln k_r - k_{ri} \ln k_{ri})$$

takže

$$\delta \ln W = -\sum_r \sum_i \delta k_{ri} \ln k_{ri}$$

teda pri maxime pravdepodobnosti

$$\sum_r \sum_i \delta k_{ri} \ln k_{ri} = 0 \tag{a}$$

lebo podľa predpokladu $\delta k_r = 0$. Z podmienok $k_r = \sum_i k_{ri}$, $n = \sum_r \sum_i i k_{ri}$, $E = \sum_r \sum_i i\varepsilon_r k_{ri}$ vyplýva, že aj

$$\sum_i \delta k_{ri} = 0 \tag{b}$$

$$\sum_r \sum_i i \delta k_{ri} = 0 \tag{c}$$

$$\sum_r \sum_i i \varepsilon_r \delta k_{ri} = 0 \tag{d}$$

Vynásobme rovnice (b) multiplikátorom $-\ln \alpha_r$, rovnicu (c) multiplikátorom β, rovnicu (d) multiplikátorom γ a pripočítajme ich k rovnici (a). Dostávame tak rovnicu

$$\sum_r \sum_i \left(\ln \frac{k_{ri}}{\alpha_r} + \beta i + \gamma i \varepsilon_r\right) \delta k_{ri} = 0$$

alebo, keďže v tejto rovnici sú už všetky δk_{ri} ľubovoľne voliteľné, rovnice

$$k_{ri} = \alpha_r \,.\, \mathrm{e}^{-i(\beta + \gamma \varepsilon_r)} \tag{5}$$

Konštantu α_r vystupujúcu vo vzorci (5), určuje počet k_r oddelení v r-tej skupine oddelení

$$k_r = \sum_i k_{ri} = \sum_i \alpha_r \, \mathrm{e}^{-i(\beta + \gamma \varepsilon_r)} = \frac{\alpha_r}{1 - \mathrm{e}^{-(\beta + \gamma \varepsilon_r)}}$$

keďže sumačný index i začína s $i = 0$ a môže sa zväčšovať ľubovoľne, lebo členy s vysokým i sú zanedbateľne malé. Teda

$$\alpha_r = k_r(1 - \mathrm{e}^{-(\beta + \gamma \varepsilon_r)})$$

Pre počet častíc v r-tej skupine oddelení, ktoré sa vyznačujú tým, že majú všetky rovnakú energiu ε_r, dostávame takto vyjadrenie

$$n_r = \sum_i i k_{ri} = \alpha_r \sum_i i \, \mathrm{e}^{-i(\beta + \gamma \varepsilon_r)} = -\alpha_r \frac{\partial}{\partial(\beta + \gamma \varepsilon_r)} \sum_i \mathrm{e}^{-i(\beta + \gamma \varepsilon_r)} =$$

$$= -\alpha_r \frac{\partial}{\partial(\beta + \gamma \varepsilon_r)} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-(\beta + \gamma \varepsilon_r)}}\right) = \frac{\alpha_r \, \mathrm{e}^{-(\beta + \gamma \varepsilon_r)}}{(1 - \mathrm{e}^{-(\beta + \gamma \varepsilon_r)})^2} =$$

$$= \frac{k_r \, \mathrm{e}^{-(\beta + \gamma \varepsilon_r)}}{1 - \mathrm{e}^{-(\beta + \gamma \varepsilon_r)}} = \frac{k_r}{\mathrm{e}^{\beta + \gamma \varepsilon_r} - 1} = \frac{k_r}{B \, \mathrm{e}^{\gamma \varepsilon_r} - 1} \tag{6}$$

Konštanty B a γ vo vzorci (6) sú určené celkovým počtom častíc n a ich celkovou energiou. Pretože energia je nepochybne funkciou teploty sústavy častíc, bude výhodné hľadať závislosť veličiny γ priamo od teploty.

Za tým účelom predstavme si nádobu so stenami neprepúšťajúcimi teplo, rozdelenú priehradkou prepúšťajúcou teplo na dve časti. V ľavej nech sa nachádza N častíc riadiacich sa štatistikou Maxwellovou—Boltzmannovou, napr. N atómov jednoatómového plynu, a v pravej n častíc, pre ktoré platí štatistika Boseho—Einsteinova. Energia obidvoch sústav častíc spolu nech je E.

Podľa poučky o násobení pravdepodobností pravdepodobnosť stavu celku je:

$$W = W_M W_B$$

ak W_M je pravdepodobnosť stavu častíc maxwellovských a W_B častíc boseovských, takže (pozri aj niektoré výsledky získané už v čl. 10.5 prvého dielu tejto učebnice)

$$\ln W = \ln W_M + \ln W_B = N \ln N - \sum_j N_j \ln N_j =$$
$$= \sum_r \sum_i (k_r \ln k_r - k_{ri} \ln k_{ri})$$

Súčasne platia vzťahy

$$\sum_j \varepsilon_j N_j + \sum_r \sum_i i\varepsilon_r k_{ri} = E$$
$$\sum_j N_j = N$$
$$\sum_i k_{ri} = k_r$$
$$\sum_r \sum_i i k_{ri} = n$$

Za rovnováhy, ktorá je určená maximom štatistickej pravdepodobnosti, sú teda splnené rovnice

$$\sum_j \delta N_j \ln N_j + \sum_r \sum_i \delta k_{ri} \ln k_{ri} = 0 \tag{a}$$
$$\sum_j \varepsilon_j \delta N_j + \sum_r \sum_i i\varepsilon_r \delta k_{ri} = 0 \tag{b}$$
$$\sum_j \delta N_j = 0 \tag{c}$$
$$\sum_i \delta k_{ri} = 0 \tag{d}$$
$$\sum_r \sum_i i \delta k_{ri} = 0 \tag{e}$$

Vynásobme rovnicu (b) multiplikátorom γ, rovnicu (c) multiplikátorom $\varphi\gamma$, každú z rovníc (d) multiplikátorom $-\ln \alpha_r$, rovnicu (e) multiplikátorom β a pričítajme ich všetky k rovnici (a). Dostávame takto rovnicu

$$\sum_j (\delta N_j \ln N_j + \varphi\gamma\delta N_j + \gamma\varepsilon_j \delta N_j) +$$
$$+ \sum_r \sum_i (\delta k_{ri} \ln k_{ri} + i\varepsilon_r \gamma \delta k_{ri} - \ln \alpha_r \delta k_{ri} + \beta i \delta k_{ri}) = 0$$

ktorá, keďže všetky δN_j aj všetky δk_{ri} sú v nej ľubovoľné, je rovnocenná s rovnicami

$$N_j = \mathrm{e}^{-\gamma(\varphi + \varepsilon_j)}, \qquad k_{ri} = \alpha_r\, \mathrm{e}^{-i(\beta + \gamma\varepsilon_r)} \tag{f}$$

Z prvej z rovníc (f) vyplýva $N = \mathrm{e}^{-\gamma\varphi} \sum \mathrm{e}^{-\gamma\varepsilon_j}$, takže pre relatívnu početnosť maxwellovských častíc v ich j-tom oddelení vychádza:

$$w_j = \frac{N_j}{N} = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varepsilon_j}}{\sum \mathrm{e}^{-\gamma\varepsilon_j}} \tag{g}$$

Pre túto veličinu sme v čl. 10.5 prvého dielu tejto učebnice dostali vyjadrenie dané vzorcom (10.5.6), ktorý s ohľadom na vzorce (10.6.4) a (10.7.2) môžeme písať aj takto

$$w_j = \frac{e^{-\varepsilon_j/kT}}{e^{-\varepsilon_j/kT}} \tag{h}$$

Z porovnania obidvoch vyjadrení tej istej veličiny vyplýva $\gamma = \frac{1}{kT}$. Vzorec (6), vyjadrujúci počet boseovských častíc, ktorých energia je ε_r, je teda tiež

$$n_r = \frac{k_r}{B\,e^{\varepsilon_r/kT} - 1} \tag{7}$$

kde k značí Boltzmannovu konštantu. Konštantu B určuje podmienka $\Sigma\, n_r = n$. Keďže príslušný výpočet je zložitý, pokúsime sa ju určiť po vyslovení určitého predpokladu inakšie.

Podľa Heisenbergovho princípu neurčitosti (17.11.1) súčin neurčitostí v určení všetkých troch súradníc častice a neurčitostí v určení zložiek jej hybnosti splňuje nerovnosť

$$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta p_x\, \Delta p_y\, \Delta p_z \geqq h^3$$

ak sústava častíc sa nenachádza v žiadnom vonkajšom silovom poli, stačí podľa Boseho o častici vedieť, že patrí do sústavy častíc, ktorá zaoberá objem V, teda písať $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = V$. Z toho pre ,,objem" bunky vo fázovom priestore hybnosti vyplýva:

$$\Delta p_x\, \Delta p_y\, \Delta p_z = \frac{h^3}{V} \tag{8}$$

Energia častice ε_r súvisí s jej hybnosťou p_r podľa vzorca $\varepsilon_r = \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{1}{2m} p_r^2$, takže $p_r = \sqrt{2m\varepsilon_r}$ a $\Delta p = \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_r}}\, \Delta\varepsilon$. Podľa toho počet k_r oddelení v r-tej skupine oddelení, v ktorých častice majú energiu z intervalu ε_r až $\varepsilon_r + \Delta\varepsilon$, je:

$$k_r = \frac{4\pi\, p_r^2\, \Delta p}{h^3/V} = \frac{4\,\pi\, 2m\varepsilon_r}{h^3/V} \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_r}}\, \Delta\varepsilon = \frac{4V\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}\varepsilon_r^{1/2}}{h^3} \tag{9}$$

Podľa vzorca (7) počet častíc v nich je teda

$$\Delta N = n_r = \frac{4V\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}\varepsilon^{1/2}}{h^3(B\,e^{\varepsilon/kT} - 1)}\, \Delta\varepsilon \tag{10}$$

ak sme index r v označení energie už vynechali. Pretože $\varepsilon = mv^2/2$, sa tiež

$$\Delta N = \frac{4V\,\pi m^3 v^2}{h^3(B\,e^{mv^2/2kT} - 1)}\, \Delta v \tag{11}$$

Za predpokladu, že $B \gg 1$, vzorec (11) sa zjednoduší na tvar

$$\Delta N = \frac{4V\pi m^3 v^2}{Bh^3}\,\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\,\Delta v \tag{12}$$

zatiaľ čo z Maxwellovej-Boltzmannovej štatistiky pre tú istú veličinu (vzorec 10.7.5 prvého dielu tejto učebnice) vyplýva:

$$\Delta N = N\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\,v^2\,\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\,\Delta v \tag{13}$$

Z porovnania obidvoch týchto výsledkov pre B $\gg$ 1 dostaneme vzorec

$$B = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3N/V} \tag{14}$$

17.13. Fermiho—Diracova štatistika. Podľa Pauliho princípu atóm nemôže mať v elektrónovom obale svojho jadra dva elektróny, ktorých všetky kvantové čísla by boli totožné, t. j. dva elektróny v tom istom kvantovom stave. Vychádzajúc z tohto princípu taliansky fyzik Enrico Fermi (1901—1954) pozmenil Boseho a Einsteinovu štatistiku predpokladom, že ani v žiadnom inom súbore rovnakých častíc to nie je možné. V našom prípade to značí, že počet častíc v tom istom oddelení kvantovaného fázového priestoru sa môže rovnať len 0 alebo 1. Tento predpoklad sa uplatňuje až pri hľadaní multiplikátora α_r vo vzorci (17.12.5)

$$k_{ri} = \alpha_r\,\mathrm{e}^{-i(\beta+\gamma\varepsilon_r)} \tag{1}$$

Keďže podľa Fermiho i môže sa rovnať len 0 alebo 1, značí to, že

$$k_r = k_{r0} + k_{r1} = \alpha_r(1 + \mathrm{e}^{-(\beta+\gamma\varepsilon_r)})$$

takže

$$\alpha_r = \frac{k_r}{1 + \mathrm{e}^{-(\beta+\gamma\varepsilon_r)}}$$

a

$$n_r = k_{r1} = \frac{k_r\,\mathrm{e}^{-(\beta+\gamma\varepsilon_r)}}{1 + \mathrm{e}^{-(\beta+\gamma\varepsilon_r)}} = \frac{k_r}{\mathrm{e}^{\beta+\gamma\varepsilon_r} + 1} = \frac{k_r}{B\,\mathrm{e}^{\varepsilon_r/kT} + 1} \tag{2}$$

lebo v predošlom článku použitá metóda poskytuje aj v tomto prípade výsledok $\gamma = 1/kT$.

Je veľmi zaujímavé aj významné, že štatistika Boseho—Einsteinova a štatistika Fermiho, ktorú podrobnejšie rozpracoval anglický fyzik P. Dirac (* 1902), vedú pre počet častíc s energiou ε_r ku vzorcom, ktoré sa líšia len znamienkom pred číslom 1 v menovateli. Pre $B \gg 1$ sú teda vzájomne rovnocenné a obidve — ako to vyplýva zo vzorcov (17. 12. 11) a (17.12.12) — sú rovnocenné aj so štatistikou Maxwellovou—Boltzmannovou.