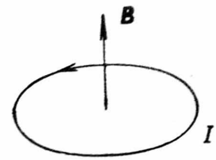
homogénne magnetické pole sa snaží natočiť v sebe uzavretý vodič prúdu tak, aby indukčné čiary prúdu vo vodiči splynuli s indukčnými čiarami vonkajšieho poľa (*obr. 4.4*).

Na silových účinkoch magnetického poľa na vodič elektrického prúdu je založená konštrukcia *voltmetrov*, *ampérmetrov*, *wattmetrov* a *galvanometrov* s pohyblivou cievkou. So zrkadlovým galvanometrom budeme sa zaoberať v čl. 6.5; princíp wattmetra bude podaný v čl. 6.11.



Obr. 4.4.

4.4. Biotov a Savartov zákon. Indukcia $\mathbf{B}$ v magnetickom poli vodičov elektrického prúdu závisí od ich tvaru, od prúdov v nich a od polohy bodu, v ktorom magnetickú indukciu máme na mysli. Biot a Savart r. 1820 zistili, že indukcia v okolí dlhého priameho vodiča je nepriamo úmerná vzdialenosti od vodiča prúdu. Pri vodičoch zložitejšieho tvaru možno vo všeobecnosti povedať len to, že indukcia magnetického poľa v ich okolí je úmerná prúdom vo vodičoch.

Indukcia v magnetickom poli každého vodiča prúdu závisí od všetkých jeho úsekov. Jednotlivé dĺžkové elementy vodiča prispievajú k celkovej indukcii $\mathbf{B}$ elementárnymi hodnotami d$\mathbf{B}$, ktoré však priamo zmerať nemožno, lebo nemožno osamostatniť dĺžkový element vodiča prúdu. V okolí vodiča možno merať len magnetickú indukciu budenú celým vodičom prúdu. Laplaceovi zovšeobecnením rôznych experimentálnych výsledkov sa však napriek tomu podarilo nájsť elementárny zákon, ktorý pri svojom použití pre vodič ľubovoľne zložitého tvaru vždy správne vyjadruje magnetickú indukciu v poli elektrického prúdu. Tento zákon sa nazýva *Biotovým-Savartovým-Laplaceovým zákonom*, stručnejšie len Biotovým a Savartovým zákonom. Podľa tohto zákona dĺžkový element vodiča prúdu prispieva k indukcii magnetického poľa v okolí vodiča hodnotou

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = k \frac{I \,\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

alebo, ak zavedieme tzv. *magnetickú permeabilitu vákua* vzťahom $\mu_0 = 4\pi k$, takže bude $k = \mu_0/4\pi$,

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \,\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{1}$$

V sústave SI dimenzia magnetickej permeability je

$$\mu_0 = ([\mathrm{B}] \,.\, \mathrm{M}) : \mathrm{A} = \mathrm{KMS}^{-2}\mathrm{A}^{-2}$$

Podľa svojej dnes platnej definície základná jednotka elektrického prúdu v sústave SI, 1 ampér (1 A), je taký prúd, že pri jeho používaní ako jednotky magnetická permeabilita vákua je presne

$$\mu_0 = 4\pi \,.\, 10^{-7}\ \mathrm{KMS^{-2}A^{-2}} \tag{2}$$

Definíciu prúdu 1 ampér vyslovíme však ešte v tomto článku aj názornejšie.

Zo vzorcov (1) a (4.3.3) vyplýva, že napríklad dva rovnobežné vodiče s prúdmi súhlasných smerov sa priťahujú, a ak sú v nich prúdy nesúhlasných smerov, odpudzujú sa. Podobne dva vzájomne rovnobežné kruhové závity sa priťahujú, keď sú v nich prúdy súhlasných zmyslov, a odpudzujú sa, keď je to obrátene.

Podľa Biotovho a Savartovho zákona v okolí v sebe uzavretého vodiča ustáleného elektrického prúdu (a každý vodič ustáleného elektrického prúdu musí byť v sebe uzavretý) vektor magnetickej indukcie je

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{3}$$

Podobne ako vektor intenzity elektrického poľa možno odvodiť od skalárneho potenciálu v tomto poli $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \frac{\varrho\,\mathrm{d}\tau}{r}$, $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, V$, aj vektor indukcie v magnetickom poli ustálených prúdov možno odvodiť od určitej, avšak vektorovej veličiny, ktorá sa nazýva *vektorový potenciál* v tomto poli. V okolí jedného vodiča ustáleného elektrického prúdu vektorový potenciál je definovaný vzorcom

$$\mathbf{P} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{s}}{r} \tag{4}$$

V okolí vodiča s takýmto prúdom je skutočne

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \oint \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{s}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \nabla \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{B}$$

takže

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{P} \tag{5}$$

V spoločnom magnetickom poli dvoch alebo väčšieho počtu vodičov s ustálenými prúdmi vektorový potenciál sa rovná súčtu vektorových potenciálov určených jednotlivými vodičmi prúdu.

Poznámka: Vzorec (4) určuje síce jednoznačne vektorový potenciál v okolí vodiča, neurčuje ho však v jednotlivých bodoch vodiča samotného, lebo vo vzorci (4) menovateľ r zlomku za integračným znamienkom značí vzdialenosť dĺžkového elementu $\mathrm{d}\mathbf{s}$ od bodu, v ktorom tento vzorec vektorový potenciál má určovať. Pri integrácii pevný bod na vodiči je preto bodom nespojitosti funkcie $\frac{1}{r}$ a integrál $\oint \frac{d\mathbf{s}}{r}$ pre takýto bod nie je definovaný. Vzorec (4) opiera sa však o fikciu vodiča s nekonečne malým prierezom, aký v skutočnosti nejestvuje. Skutočnosť nevyjadruje preto vždy správne. Všeobecne upotrebiteľným vzorcom pre vektorový potenciál je vzorec, v ktorom prúdový element je napísaný v jedine správnom, aj keď menej názornom tvare $\mathbf{i}\,d\tau$, teda vzorec

$$\mathbf{P} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}\,d\tau}{r} \tag{6}$$

Možno o ňom dokázať, že správne určuje vektorový potenciál $\mathbf{P}$ nielen v okolí vodičov, ale aj na ich povrchu a v ich vnútri, pričom je vždy $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{P}$.

Pretože divergencia rotácie každej vektorovej funkcie sa rovná nule, zo vzorca (5) vyplýva bezprostredne 2. *Maxwellova rovnica*

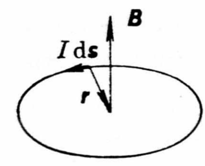
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

Kvalitatívny obsah vzorca (1), t. j. zákona Biotovho a Savartovho, vyjadruje tzv. 1. *pravidlo pravej ruky*: Dajme pravú ruku na vodič s prstami po prúde a ruku natočme ešte tak, aby dlaň bola obrátená k bodu, v ktorom vektor magnetickej indukcie práve určujeme. Jeho smer udáva potom palec tejto ruky.

Príklad 1. Vypočítame abs. hodnotu magnetickej indukcie v strede kruhového závitu s polomerom r, v ktorom je elektrický prúd intenzity I.

Pretože polohový vektor $\mathbf{r}$ stredu závitu vzhľadom na všetky body jeho obvodu je na príslušné dĺžkové elementy $d\mathbf{s}$ kolmý, podľa vzorca (3) vychodí:

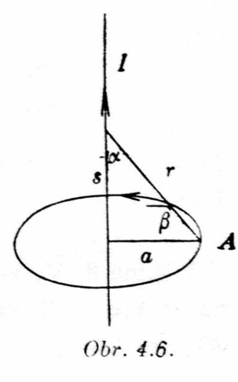
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{ds}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$



Obr. 4.5.

Vektor $\mathbf{B}$ je na rovinu závitu kolmý a orientovaný na tú jeho stranu, z ktorej sa smer prúdu v závite javí v zmysle proti pohybu hodinových ručičiek (*obr. 4.5*).

Príklad 2. Vypočítame abs. hodnotu magnetickej indukcie v okolí nekonečne dlhého priameho vodiča s prúdom I vo vzdialenosti a od neho.



Obr. 4.6.

Podobne ako v strede kruhového závitu vo zvolenom bode v okolí tohto vodiča príspevky jednotlivých jeho prúdových elementov k indukcii $\mathbf{B}$ sú tiež všetky vzájomne súhlasne rovnobežné a na vodič kolmé. Možno preto počítať hneď abs. hodnotu vektora $\mathbf{B}$, ktorého vektorové čiary sú kružnice nachádzajúce sa v rovinách na vodič kolmých.

Podľa *obr. 4.6* $r = \frac{a}{\cos\beta}$, $s = a \operatorname{tg} \beta$, teda $ds =$

$= \dfrac{a}{\cos^2\beta}\,\mathrm{d}\beta$. Podľa týchto vzťahov v bode A diferenciál abs. hodnoty magnetickej indukcie je

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(\mathrm{d}s)\, r \sin(\pi - \alpha)}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}s}{r^2} \cos\beta =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{\cos^2\beta} \frac{1}{r^2} \cos\beta\, \mathrm{d}\beta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos\beta\, \mathrm{d}\beta}{a}$$

Preto

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, \mathrm{d}\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin\beta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tag{8}$$

Predstavme si, že v dvoch nekonečne dlhých, prakticky veľmi dlhých a vzájomne rovnobežných vodičoch sú rovnaké prúdy I a vzájomná vzdialenosť vodičov je a. Podľa výsledku príkladu 2 jeden z vodičov budí v mieste druhého vodiča magnetické pole indukcie $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$. Podľa vzorca (4.3.3) dĺžkový element druhého vodiča podlieha preto v tomto poli, keď bolo vytvorené vo vákuu, sile s abs. hodnotou

$$\mathrm{d}f = (I\, \mathrm{d}s)\, B = I \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \mathrm{d}s$$

Na dĺžkovú jednotku tohto vodiča účinkuje teda sila, ktorá sa číselne rovná hodnote výrazu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}$$

Keď v obidvoch vodičoch je prúd 1 ampér a vzájomná vzdialenosť vodičov je 1 meter, na 1 meter dlhý úsek ktoréhokoľvek z obidvoch vodičov pripadá teda sila

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{4\pi \,.\, 10^{-7}\, \mathrm{KMS^{-2}A^{-2}A^2}}{2\pi \,.\, 1\, \mathrm{M}} = 2 \,.\, 10^{-7}\, \mathrm{newton/m}$$

Tento výsledok možno považovať za názornú definíciu jednotky prúdu 1 ampér.

Príklad 3. Vypočítame magnetickú indukciu v ľubovoľne zvolenom bode **A** na osi kruhového závitu s polomerom R, v ktorom je prúd I, vo vzdialenosti a od jeho roviny.

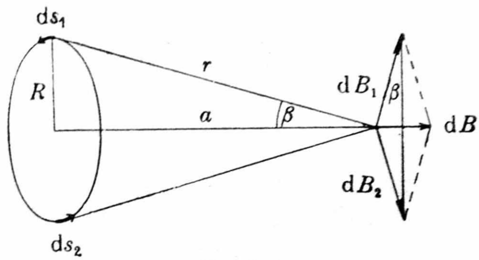
Podľa *obr. 4.7* dva protiľahlé dĺžkové elementy závitu $d\mathbf{s}_1$ a $d\mathbf{s}_2$ prispievajú k magnetickej indukcii v bode A hodnotami $d\mathbf{B}_1$ a $d\mathbf{B}_2$, ktorých súčet ako vektorov je s osou závitu rovnobežný elementárny vektor $d\mathbf{B}$. Zo zákona Biotovho a Savartovho pre jeho abs. hodnotu dostávame:

$$dB = 2\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{ds}{r^2}\sin\beta$$

takže abs. hodnota magnetickej indukcie v bode A je

$$B = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I\,ds}{r^2}\sin\beta =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I\,\pi R}{r^2}\cdot\frac{R}{r} = \mu_0 I\,\frac{R^2}{2r^3} \quad (9)$$



Obr. 4.7.

Keď polomer závitu R vzhľadom na vzdialenosť a bodu A od roviny závitu je malý, namiesto r môžeme v získanom výsledku písať a. Pretože okrem toho $S = \pi R^2$ je plocha závitu, magnetická indukcia v bode A je približne tiež

$$B = \mu_0 I\,\frac{R^2}{2r^3} = \mu_0\,\frac{SI}{2\pi a^3}$$

Utvorme dráhový integrál vektora $\mathbf{B}$ pozdĺž indukčnej čiary v okolí nekonečne dlhého priameho vodiča s prúdom I. Použitím výsledku (8) dostávame:

$$A = \oint_0^{2\pi a} B\,ds = \mu_0\,\frac{I}{2\pi a}\,.\,2\pi a = \mu_0 I \qquad (10)$$

Utvorme práve tak dráhový integrál vektora $\mathbf{B}$ pozdĺž osi kruhového závitu s prúdom I v hraniciach od $-\infty$ do $+\infty$. Použitím výsledku (9) dostávame tiež:

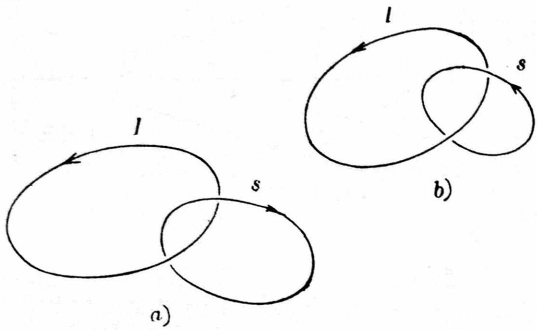
$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0\,\frac{IR^2}{2r^3}\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0\,\frac{IR^2}{2s^3}\cos^3\beta\,ds$$

Ale $s = R\cot\beta$, $ds = -R\,\dfrac{1}{\sin^2\beta}\,d\beta$, a preto opäť

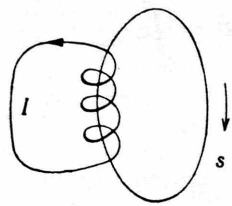
$$A = -\int_{\pi}^{0} \mu_0\,\frac{IR^2}{2}\cdot\frac{\sin^3\beta}{R^3\cos^3\beta}\cos^3\beta\,\frac{R}{\sin^2\beta}\,d\beta =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2}\int_{\pi}^{0}\sin\beta\,d\beta = \frac{\mu_0 I}{2}\,[\cos\beta]_{\pi}^{0} = \mu_0 I$$

V článku 4.5 dokážeme, že tieto výsledky majú všeobecnú platnosť. Kedykoľvek je uzavretá integračná dráha, ktorá ani nemusí byť totožná s indukčnou čiarou, spriahnutá s orientovaným vodičom elektrického prúdu pravotočivo (*obr. 4.8a*, *obr. 4.8b* predstavuje spriahnutie ľavotočivé), je $\oint \mathbf{B} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 I$, pričom o znamienku prúdu rozhoduje zvolená orientácia vodiča prúdu.



Obr. 4.8.

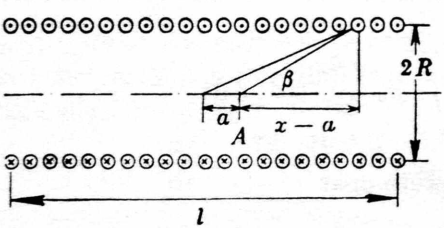


Obr. 4.9.

Ak integračná dráha je s vodičom prúdu spriahnutá n-krát, je $\oint \mathbf{B} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{s} = n\mu_0 I$ (*obr. 4.9*). Všeobecne je teda

$$\oint \mathbf{B} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{s} = n\mu_0 I$$

Príklad 4. Vypočítame ešte absolútnu hodnotu magnetickej indukcie v ľubovoľne zvolenom bode A na osi solenoidu, ktorého vzdialenosť od stredu solenoidu je a (*obr. 4.10*). Dĺžka solenoidu nech je l, polomer jeho závitov R, ich počet nad jednotkou dĺžky osi solenoidu n a prúd v závitoch solenoidu I.



Obr. 4.10.

Úsek solenoidu dĺžky $\mathrm{d}x$ môžeme považovať za kruhový závit s prúdom $In\,\mathrm{d}x$, ktorý podľa vzorca (9) prispieva k magnetickej indukcii v bode A hodnotou

$$\mathrm{d}B = \mu_0 \frac{R^2 In\,\mathrm{d}x}{2[R^2 + (x - a)^2]^{3/2}}$$

Pomocou uhla β, ktorého význam podľa *obr. 4.10* je jasný, môžeme písať:

$$x - a = R \operatorname{cotg} \beta, \quad R^2 + (x - a)^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \beta}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{R}{\sin^2 \beta}\,\mathrm{d}\beta$$

Je preto tiež

$$\mathrm{d}B = \mu_0 \frac{R^2 I n}{2 \dfrac{R^3}{\sin^3 \beta}} \cdot \left(- \frac{R}{\sin^2 \beta}\right) \mathrm{d}\beta = - \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \beta \, \mathrm{d}\beta$$

takže magnetická indukcia v bode A je

$$B = \int \mathrm{d}B = - \frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \mu_0 I n \sin \beta \, \mathrm{d}\beta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

Keď solenoid je veľmi dlhý, pre body, ktoré sa nachádzajú vnútri solenoidu na jeho osi a v dostatočnej vzdialenosti od jeho koncov, je $\beta_1 \doteq \pi$, $\beta_2 \doteq 0$, takže v týchto bodoch je $B \doteq \mu_0 n I$. V strede základne solenoidu s ľubovoľnou dĺžkou je $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, takže magnetická indukcia v tomto bode je $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \cos \beta_2$, pri solenoide veľmi dlhom teda $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$. Smer indukčných čiar vnútri solenoidu je určený 1. pravidlom pravej ruky. Keď sa pozeráme v smere indukčných čiar idúcich vnútrom solenoidu, smer prúdu v závitoch solenoidu súhlasí s pohybom hodinových ručičiek.

4.5. Ekvivalencia prúdu a magnetickej dvojvrstvy. Podľa zákona Biotovho a Savartovho v okolí v sebe uzavretého lineárneho vodiča elektrického prúdu s prúdom I, ktorý sa s časom nemení, je vo vákuu magnetostatické pole s indukciou

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = - \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{s}}{r^3} \tag{1}$$

Aby sme pomocou Stokesovej vety mohli krivkový integrál vystupujúci v tomto vzorci nahradiť tiež integrálom plošným, budeme postupovať rovnako ako v čl. 4.3. Budeme upravovať skalárny súčin integrálu $\oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$ s ľubovoľným konštantným vektorom $\mathbf{a}$. Okrem toho pre uľahčenie výpočtu vektor $\mathbf{r}$ abs. hodnoty r, ktorý sa začína v mieste prúdového elementu $I \, \mathrm{d}\mathbf{s}$ a končí sa v bode, v ktorom vzorec (1) určuje magnetickú indukciu, nahradíme prechodne vektorom $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ abs. hodnoty $r' = r$. Dostávame postupne:

$$\mathbf{a} \cdot \oint \frac{\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{s}}{r^3} = - \oint \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathrm{d}\mathbf{s})}{r'^3} = - \oint \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}'}{r'^3} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} =$$

$$= - \int \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}'}{r'^3} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = - \int \nabla \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}'}{r'^3} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} =$$