

Je preto tiež

$$dB = \mu_0 \frac{R^2 I n}{2 \frac{R^3}{\sin^3 \beta}} \cdot \left(-\frac{R}{\sin^2 \beta} \right) d\beta = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \beta d\beta$$

takže magnetická indukcia v bode A je

$$B = \int dB = -\frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \mu_0 n I \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

Keď solenoid je veľmi dlhý, pre body, ktoré sa nachádzajú vnútri solenoidu na jeho osi a v dostatočnej vzdialenosti od jeho koncov, je $\beta_1 \doteq \pi$, $\beta_2 \doteq 0$, takže v týchto bodoch je $B \doteq \mu_0 n I$. V strede základne solenoidu s ľubovoľnou dĺžkou je $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, takže magnetická indukcia v tomto bode je $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \cos \beta_2$,

pri solenoide veľmi dlhom teda $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$. Smer indukčných čiar vnútri solenoidu je určený 1. pravidlom pravej ruky. Keď sa pozeráme v smere indukčných čiar idúcich vnútrom solenoidu, smer prúdu v závitoch solenoidu súhlasí s pohybom hodinových ručičiek.

4.5. Ekvivalencia prúdu a magnetickej dvojvrstvy. Podľa zákona Biotovho a Savartovho v okolí v sebe uzavretého lineárneho vodiča elektrického prúdu s prúdom I , ktorý sa s časom nemení, je vo vákuu magnetostatické pole s indukciou

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3} \quad (1)$$

Aby sme pomocou Stokesovej vety mohli krivkový integrál vystupujúci v tomto vzorci nahradiť tiež integrálom plošným, budeme postupovať rovnako ako v čl. 4.3. Budeme upravovať skalárny súčin integrálu $\oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$ s ľubovoľným konštantným vektorom $\mathbf{a}$. Okrem toho pre uľahčenie výpočtu vektor $\mathbf{r}$ abs. hodnoty r , ktorý sa začína v mieste prúdového elementu $I d\mathbf{s}$ a končí sa v bode, v ktorom vzorec (1) určuje magnetickú indukciu, nahradíme prechodne vektorom $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ abs. hodnoty $r' = r$. Dostávame postupne:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oint \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3} &= -\oint \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}' \times d\mathbf{s})}{r'^3} = -\oint \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}'}{r'^3} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= -\int \text{rot} \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}'}{r'^3} \right) \cdot d\mathbf{S} = -\int \nabla \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}'}{r'^3} \cdot d\mathbf{S} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \left[\left(\text{grad } \frac{1}{r'^3} \right) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}') + \frac{1}{r'^3} \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}') \right] \cdot d\mathbf{S} = \\
&= - \int \left[-3 \frac{\mathbf{r}'}{r'^5} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}') + \frac{\mathbf{a}}{r'^3} \text{div } \mathbf{r}' - \frac{\mathbf{a}}{r'^3} \cdot \text{grad } \mathbf{r}' \right] \cdot d\mathbf{S} = \\
&= - \int \left(-\frac{3\mathbf{a}}{r'^3} + 3\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}'}{r'^5} + \frac{3\mathbf{a}}{r'^3} - \frac{\mathbf{a}}{r'^3} \cdot \mathbf{l} \right) \cdot d\mathbf{S} = \\
&= \mathbf{a} \cdot \int \left(\frac{1}{r'^3} \mathbf{l} - \frac{3\mathbf{r}'\mathbf{r}'}{r'^5} \right) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot \int \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{l} - \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \right) \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

Z rovnice

$$\mathbf{a} \cdot \oint \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3} = \mathbf{a} \cdot \int \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{l} - \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

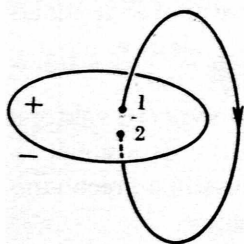
keďže vektor $\mathbf{a}$ je v nej ľubovoľný, vyplýva rovnica

$$\oint \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3} = \int \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{l} - \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

Magnetická indukcia v okolí v sebe uzavretého lineárneho vodiča s prúdom I je teda tiež

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left(\frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{l}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

V elektrostatickom poli krivkový integrál vektora intenzity poľa $\mathbf{E}$ pozdĺž ľubovoľnej uzavretej čiary, čiže jeho tzv. *cirkulácia* pozdĺž tejto čiary, sa rovná nule. Nule sa rovná táto cirkulácia aj keď integračná dráha pretína elektrickú dvojvrstvu, ako je to znázornené na obr. 4.11, na ktorom vidíme kladnú stranu dvojvrstvy.



Obr. 4.11.

Integračnú dráhu na obr. 4.11 si môžeme rozdeliť na časť začínajúcu tesne nad dvojvrstvou v bode 1 a končiacu tesne pod dvojvrstvou v bode 2 a na veľmi krátky úsek 2-1, ktorý dvojvrstvu pretína. Máme potom

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

alebo

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_2^1 -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V_1 - V_2$$

V článku (1.5) sme však dokázali, že zväčšenie elektrického potenciálu $V_1 - V_2$, vzťahujúce sa na prechod cez elektrickú dvojvrstvu z jej zápornej

strany na stranu kladnú, je h/ϵ_0 , kde h je plošná hustota dipólového momentu dvojvrstvy a ϵ_0 permitivita vákua. Preto $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{h}{\epsilon_0}$

Vzorec (2) vyjadrujúci vektor indukcie v okolí v sebe uzavretého vodiča elektrického prúdu, líši sa od vzorca (1.5.9)]

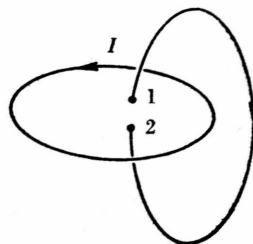
$$\mathbf{E} = \frac{h}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{I}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

ktorý určuje vektor intenzity elektrostatického poľa v okolí dvojvrstvy, len v tom, že vo vzorci (2) namiesto h/ϵ_0 máme $\mu_0 I$. To značí, že v zmysle obr. 4.12

je $\int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$, pričom v tomto druhom prípade môžeme body 1 a 2 aj stotožniť, teda písať $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$, lebo vodič prúdu vo skutočnosti nijakú dvojvrstvu neohraničuje.

Z odvodenia tohoto výsledku je bezprostredne zrejmé, že v prípade viacnásobného spriahnutia integračnej dráhy s vodičom prúdu by bolo

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = n\mu_0 I \quad (3)$$



Obr. 4.12.

ako sme to uviedli bez dôkazu už v čl. 4.4. Pri používaní vzorca (4.4.10), to- tožného so vzorcom (3), treba však dbať na to, aby orientovaný vodič prúdu bol spriahnutý s integračnou dráhou pravotočivo, lebo táto orientácia vodiča rozhoduje o znamienku prúdu I .

V magnetickom poli slučky s prúdom I nech sa nachádza iný v sebe uzavretý vodič s prúdom I' . Podľa vzorca (4.3.4) účinkuje naň sila

$$\mathbf{f} = I' \oint \text{grad } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}' \quad (4)$$

Podľa výsledkov (2) a (4) účinkuje na uzavretý vodič prúdu s prúdom I' iný takýto vodič s prúdom I silou

$$\mathbf{f} = I' \int_{S'} \left[\text{grad } \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \left(\frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{I}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S} \right] \cdot d\mathbf{S}'$$

alebo

$$\mathbf{f} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_{S'} d\mathbf{S}' \cdot \int_S \nabla \left(\frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{I}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

V čl. 1.5 sme odvodili vzorec (10),

$$\mathbf{f} = \frac{hh'}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} d\mathbf{S}' \cdot \int_S \nabla \left(\frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{I}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

ktorý vyjadruje silu účinkujúcu medzi dvoma elektrickými dvojvrstvami s plnými hustotami dipólových momentov h a h' . Práve odvodený vzorec (5) líši a od vzorca (1.5.10) len tým, že namiesto konštantného činiteľa $\frac{hh'}{4\pi\epsilon_0}$, ktorý figuruje v tomto vzorci, vo vzorci (5) figuruje konštantný činiteľ $\frac{\mu_0 II'}{4\pi}$.

Z tejto zhody tvaru vzorcov (1.5.10) a (5) vyplýva, že vzájomný silový účinok dvoch v sebe uzavretých vodičov elektrických prúdov I a I' bude rovnaký ako silový účinok dvoch týmito prúdmi ohraničených elektrických dvojvrstiev, keď bude splnená podmienka $\frac{hh'}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 II'}{4\pi}$, t. j. $hh' = \epsilon_0 \mu_0 II' = (\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} I)(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} I')$, kde $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ je tzv. *Weberovo číslo*, rovnajúce sa rýchlosťou svetla vo vákuu (čl. 7.2). Podmienku $hh' = \frac{I}{c} \cdot \frac{I'}{c}$ možno zrejme splniť

voľbou $h = \frac{I}{c}$ a $h' = \frac{I'}{c}$. Inými slovami: *Dva v sebe uzavreté vodiče elektrického prúdu s prúdmi I a I' s ohľadom na vzájomné silové účinky sú rovnocenné s dvoma elektrickými dvojvrstvami vytvorenými na plochách, ktoré prúdy I a I' ohraničujú, keď plošné hustoty ich dipólových momentov sú: $h = \frac{I}{c}$ a $h' = \frac{I'}{c}$.*

Činiteľa $\frac{\mu_0 II'}{4\pi}$ zo vzorca (5) možno však upraviť aj na tvar $\frac{(\mu_0 I)(\mu_0 I')}{4\pi\mu_0}$, podľa ktorého vzájomný silový účinok dvoch v sebe uzavretých vodičov elektrického prúdu je rovnaký ako dvoch nimi ohraničených dvojvrstiev s plošnou hustotou dipólových momentov $\mu_0 I$ a $\mu_0 I'$ určitých dvoch vzájomne opačných substancií, ktorých bodové množstvá m_1 a m_2 účinkujú na seba silou

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}_{12} \quad (6)$$

Táto okolnosť umožňovala s úspechom vysvetlovať vzájomné silové účinky magnetov a dočasne zmagnetovaných telies pomocou predstavy o existencii *kladného* (severného) a *záporného* (južného) *magnetického množstva*, od seba síce úplne neseparovateľných, no schopných pri tzv. *magnetizácii* hmotného prostredia vytvárať (magnetické) dipóly a dvojvrstvy.

Pretože plošná hustota dipólového momentu hypotetickej magnetickej dvojvrstvy, ktorú vodič prúdu ohraničuje, je $\mu_0 I$, celkový magnetický dipólový moment tejto dvojvrstvy je $\mu_0 I \int d\mathbf{S} = \mu_0 I \mathbf{S}$, pričom $\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}$ je plošný vektor reprezentujúci plochu dvojvrstvy, t. j. plochu ohraničenú vodičom elektrického prúdu. Je orientovaný na jej kladnú stranu. Pre túto príčinu sa vektorová veličina $\mu_0 I \mathbf{S}$, charakterizujúca v sebe uzavretý vodič prúdu I , nazýva *magnetickým momentom* tohto prúdu aj v úvahách, ktoré nepoužívajú predstavu o magnetických množstvách.

Podľa vzorca (6) rozmer magnetického množstva v sústave SI je

$$[\mathbf{m}] = [\mathbf{r}] \sqrt{[\mathbf{f}] [\mu_0]} = \text{M} \sqrt{\text{KMS}^{-2} \cdot \text{KMS}^{-2} \text{A}^{-2}} = \text{KM}^2 \text{S}^{-2} \text{A}^{-1}$$

Jednotkou je magnetické množstvo, ktoré — podľa vzorca (6) — na rovnako veľké množstvo vo vzdialenosti 1 m účinkuje silou

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{KMS}^{-2} \text{A}^{-2}} \cdot \frac{\text{K}^2 \text{M}^4 \text{S}^{-4} \text{A}^{-2}}{\text{M}^2} = \frac{10^7}{16\pi^2} \text{KMS}^{-2} = \\ &= 6,35 \cdot 10^4 \text{ newton} \end{aligned}$$

4.6. Intenzita v magnetickom poli. Doteraz sme sa zaoberali magneto-statickým poľom vytvoreným aspoň prakticky vo vákuu, t. j. v prostredí, v ktorom je málo elektrónov, atómov alebo iných elementárnych častíc hmoty. Práve tak ako na elektrické pole, má hmotné prostredie vo všeobecnosti vplyv aj na magnetické pole, ktoré sa v tom prípade nazýva *magnetikum*. Vplyv nevodičového hmotného prostredia na elektrické pole sme vysvetlili jeho polarizáciou. Polarizáciou vznikajú na povrchoch nevodičov a v miestach, kde dielektrikum je nehomogénne, „viazané“ elektrické náboje s príslušnými plošnými a objemovými hustotami σ' a ρ' . Tieto náboje vytvárajú elektrické pole intenzity $\mathbf{E}'$, ktoré sa skladá s elektrickým poľom voľných elektrických nábojov intenzity $\mathbf{E}_0$ na výsledné pole intenzity $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$. Podobne každé magnetikum, ktoré sa nachádza v magnetickom poli elektrických prúdov alebo permanentných magnetov, mení svoj stav v tomto poli tak, že má potom aj samo vplyv na magnetické pole. Hovoríme, že sa *zmagnetuje*. Práve tak ako spolarizované dielektrikum vytvára svoje elektrické pole intenzity $\mathbf{E}'$, vytvára zmagnetované magnetikum svoje magnetické pole indukcie $\mathbf{B}'$, ktorá sa skladá s magnetickým poľom zjavných prúdov indukcie $\mathbf{B}_0$ na výsledné magnetické pole indukcie $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$. Podľa teórie, ktorú vyslovil Ampère a ktorá je vo veľmi dobrej zhode so stavbou atómov a molekúl, na rozdiel od polarizácie dielektrika magnetizácia magnetika nespočíva však vo vzniku nejakých magnetických dipólov a dvojvrstiev, ale vo vzniku alebo v priestorovej orientácii rovín elementárnych elektrických prúdov v atómoch a molekulách magnetika,