

Pretože plošná hustota dipólového momentu hypotetickej magnetickej dvojvrstvy, ktorú vodič prúdu ohraničuje, je $\mu_0 I$, celkový magnetický dipólový moment tejto dvojvrstvy je $\mu_0 I \int d\mathbf{S} = \mu_0 I \mathbf{S}$, pričom $\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}$ je plošný vektor reprezentujúci plochu dvojvrstvy, t. j. plochu ohraničenú vodičom elektrického prúdu. Je orientovaný na jej kladnú stranu. Pre túto príčinu sa vektorová veličina $\mu_0 I \mathbf{S}$, charakterizujúca v sebe uzavretý vodič prúdu I , nazýva *magnetickým momentom* tohto prúdu aj v úvahách, ktoré nepoužívajú predstavu o magnetických množstvách.

Podľa vzorca (6) rozmer magnetického množstva v sústave SI je

$$[\mathbf{m}] = [\mathbf{r}] \sqrt{[\mathbf{f}]} [\mu_0] = \text{M} \sqrt{\text{KMS}^{-2} \cdot \text{KMS}^{-2} \text{A}^{-2}} = \text{KM}^2 \text{S}^{-2} \text{A}^{-1}$$

Jednotkou je magnetické množstvo, ktoré — podľa vzorca (6) — na rovnako veľké množstvo vo vzdialenosti 1 m účinkuje silou

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{KMS}^{-2} \text{A}^{-2}} \cdot \frac{\text{K}^2 \text{M}^4 \text{S}^{-4} \text{A}^{-2}}{\text{M}^2} = \frac{10^7}{16\pi^2} \text{KMS}^{-2} = \\ &= 6,35 \cdot 10^4 \text{ newton} \end{aligned}$$

4.6. Intenzita v magnetickom poli. Doteraz sme sa zaoberali magneto-statickým poľom vytvoreným aspoň prakticky vo vákuu, t. j. v prostredí, v ktorom je málo elektrónov, atómov alebo iných elementárnych častíc hmoty. Práve tak ako na elektrické pole, má hmotné prostredie vo všeobecnosti vplyv aj na magnetické pole, ktoré sa v tom prípade nazýva *magnetikum*. Vplyv nevodičového hmotného prostredia na elektrické pole sme vysvetlili jeho polarizáciou. Polarizáciou vznikajú na povrchoch nevodičov a v miestach, kde dielektrikum je nehomogénne, „viazané“ elektrické náboje s príslušnými plošnými a objemovými hustotami σ' a ρ' . Tieto náboje vytvárajú elektrické pole intenzity $\mathbf{E}'$, ktoré sa skladá s elektrickým poľom voľných elektrických nábojov intenzity $\mathbf{E}_0$ na výsledné pole intenzity $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$. Podobne každé magnetikum, ktoré sa nachádza v magnetickom poli elektrických prúdov alebo permanentných magnetov, mení svoj stav v tomto poli tak, že má potom aj samo vplyv na magnetické pole. Hovoríme, že sa *zmagnetuje*. Práve tak ako spolarizované dielektrikum vytvára svoje elektrické pole intenzity $\mathbf{E}'$, vytvára zmagnetované magnetikum svoje magnetické pole indukcie $\mathbf{B}'$, ktorá sa skladá s magnetickým poľom zjavných prúdov indukcie $\mathbf{B}_0$ na výsledné magnetické pole indukcie $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$. Podľa teórie, ktorú vyslovil Ampère a ktorá je vo veľmi dobrej zhode so stavbou atómov a molekúl, na rozdiel od polarizácie dielektrika magnetizácia magnetika nespočíva však vo vzniku nejakých magnetických dipólov a dvojvrstiev, ale vo vzniku alebo v priestorovej orientácii rovín elementárnych elektrických prúdov v atómoch a molekulách magnetika,

ktoré spočívajú vo vlastnej rotácii elementárnych nábojov (tzv. *spin*) alebo v obiehaní elektrónov okolo jadier atómov.

Keď atomárny alebo elementárny prúd ohraničuje elementárnu plošku S_e , ktorej sme priradili plošný vektor $\mathbf{S}_e$, a jeho intenzita je I_e , jeho magnetický moment určuje súčin $\mu_0 I_e \mathbf{S}_e$. *Magnetizácia* hmotného prostredia $\mathbf{M}$, ktorá podobne ako polarizácia kvantitatívne charakterizuje príslušný jeho stav, definuje sa ako *súčet magnetických momentov* všetkých elementárnych prúdov v *objemovej jednotke*. Keď tieto prúdy nahradíme prúdmi s nimi ekvivalentnými, ktorých magnetické momenty sú rovnako veľké a rovnako orientované, môžeme tiež písať

$$\mathbf{M} = n \mu_0 I_e \mathbf{S}_e \quad (1)$$

pričom n značí počet elementárnych prúdov v objemovej jednotke, I_e ich intenzitu a $\mathbf{S}_e$ príslušne orientovaný plošný vektor, priradený ploške, ktorú prúdy ohraničujú.

V hmotnom prostredí, v ktorom môžu byť aj prúdy zjavné, predstavme si teraz uzavretú integračnú dráhu (obr. 4.13). Koncovými bodmi dĺžkového elementu integračnej dráhy $d\mathbf{s}$ vedme dve roviny rovnobežné s rovinami elementárnych prúdov, lepšie povedané s rovinami prúdov, ktoré sú s nimi ekvivalentné. S ohľadom na tieto prúdy dĺžkový element $d\mathbf{s}$ prispieva k integrálu $A = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ hodnotou $n' \mu_0 I_e$, kde n' je počet elementárnych prúdov vo valci so základňou S a výškou h , spriahnutých s integračnou dráhou. Je však zrejmé

$$n' : nSh = dS : S$$

t. j.

$$n' = nh \, dS = n \, d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$$

Príspevok dĺžkového elementu $d\mathbf{s}$, s ohľadom na elementárne prúdy, k integrálu $A = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ je teda

$$n' \mu_0 I_e = n \, d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \mu_0 I_e = n \mu_0 I_e \, d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}$$

a preto

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 I$$

kde I je celkový s integračnou dráhou spriahnutý zjavný prúd.

Úpravou predchádzajúcej rovnice dostávame:

$$\oint (\mathbf{B} - \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

alebo

$$\oint \frac{\mathbf{B} - \mathbf{M}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (\text{a})$$

Keď vektor

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} - \mathbf{M}) \quad (2)$$

nazveme *intenzitou v poli magnetickom*, takže bude

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (3)$$

rovniciu (a) môžeme písať v zjednodušenom tvare

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (4)$$

Podľa Stokesovej vety vektorového počtu krivkový integrál na ľavej strane rovnice (4) môžeme nahradiť integrálom plošným, vzťahujúcim sa na príslušnú a príslušne orientovanú plochu. Keď súčasne aj prúd I vyjadríme podľa jeho definície takýmto integrálom, dostávame rovnicu

$$\int \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

alebo, ak vektor $\mathbf{H}$ a jeho prvé derivácie podľa súradníc sú ich spojitými funkciami, rovnicu

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (5)$$

v ktorej $\mathbf{i}$ značí hustotu len zjavného (makro-) prúdu.

Rozmer magnetickej intenzity vyplýva zo vzorca (2)

$$[H] = \frac{[B]}{[\mu_0]} = \text{AM}^{-1}$$

V hmotnom prostredí, v ktorom je $\mathbf{M}$ úmerné $\mathbf{B}$, všetky tri vektory $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{M}$ sú si vzájomne úmerné. Konštanta úmernosti κ vo vzťahu $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$ sa nazýva *magnetická susceptibilita*, konštanta μ vo vzorci $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ *magnetická permeabilita*. Podľa vzorca (3) je potom

$$\mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \kappa \mathbf{H}$$

t. j.

$$\mu = \mu_0 + \kappa \quad (6)$$

Podiel

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\kappa}{\mu_0} = 1 + \kappa_r$$

pričom $\kappa_r = \frac{\kappa}{\mu_0}$ je tzv. *relatívna magnetická susceptibilita*, volá sa *relatívna*

permeabilita. Je zvlášť vysoká pri látkach, ktoré sa nazývajú *feromagnetické*.

Látky s $\frac{\mu}{\mu_0} > 1$ sa volajú, pri malej hodnote tohto zlomku, *paramagnetické*,

s $\frac{\mu}{\mu_0} < 1$ *diamagnetické*.

Podľa Ampérovej teórie magnetických vlastností látok v atómoch a molekulách paramagnetických látok jestvujú *molekulárne prúdy* s nenulovým celkovým magnetickým momentom, aj keď tieto látky nie sú ešte v magnetickom poli. Bez pôsobenia vonkajšieho magnetického poľa magnetické momenty atómov alebo molekúl paramagnetických látok majú však v priestore najrôznejšie smery, takže sa ich magnetické polia superpozíciou vzájomne rušia. Pôsobením vonkajšieho poľa sa roviny všetkých molekulárnych prúdov potočia tak, aby indukčné čiary vonkajšieho magnetického poľa a poľa jednotlivých molekulárnych prúdov zvierali menšie uhly [vzorec (4.3.5)]. Po tejto zmene polohy rovín molekulárnych prúdov ich magnetické polia sa už navzájom nerušia, čím prispievajú k indukcii výsledného magnetického poľa, ktoré sa nimi zosilňuje. To značí, že pri paramagnetických látkach je $\kappa > 0$.

Na rozdiel od paramagnetických látok v atómoch a molekulách diamagnetických látok nie sú stále molekulárne prúdy, alebo je ich niekoľko, ale takých, že sa ich magnetické momenty navzájom rušia. V sebe uzavreté prúdy s nenulovým celkovým magnetickým momentom vznikajú v atómoch a molekulách diamagnetických látok až pôsobením vonkajšieho magnetického poľa. Takto vznikajúce molekulárne prúdy, ktoré majú charakter indukovaných prúdov (pozri čl. 6.1), vytvárajú vo svojom okolí magnetické pole s indukciou, ktorá vonkajšie pole vždy zoslabuje. Podľa toho pri diamagnetických látkach vektor magnetizácie $\mathbf{M}$ ie s vektorom inducie vonkajšieho poľa nesúhlasne rovnobežný, čo značí, že pri týchto látkach je $\kappa < 0$, a teda $\mu = \mu_0 + \kappa < \mu_0$ a $\mu_r < 1$.

Hodnoty relatívnej permeability (pri plynoch za tlaku 1 atm) niektorých paramagnetických a diamagnetických látok sú uvedené v *tabuľke 4.1*. Pretože relatívna magnetická permeabilita týchto látok sa len veľmi málo líši od jednotky, namiesto relatívnych permeabilit sú v tabuľke uvedené rozdiely, pri látkach paramagnetických $\mu_r - 1$ a pri látkach diamagnetických $1 - \mu_r$.

Relatívne magnetické permeability niektorých látok

Tabuľka 4.1

Paramagnetické látky	$\mu_r - 1$	Diamagnetické látky	$1 - \mu_r$
Dusík	$0,013 \cdot 10^{-6}$	Vodík	$0,063 \cdot 10^{-6}$
Kyslík	$1,9 \cdot 10^{-6}$	Meď	$8,8 \cdot 10^{-6}$
Hliník	$23 \cdot 10^{-6}$	Kamenná soľ	$12,6 \cdot 10^{-6}$
Platina	$360 \cdot 10^{-6}$	Bizmut	$176 \cdot 10^{-6}$

Príklad 1. Vypočítame prácu síl homogenného magnetického poľa, v ktorom magnetická indukcia je $\mathbf{B}$, pri zmene polohy slučky s prúdom I , ktorej bol priradený plošný vektor $\mathbf{S}$, takže magnetický moment slučky je $\mathbf{M} = \mu_0 I \mathbf{S}$.

Podľa vzorca (4.3.3) na dĺžkový element slučky pôsobí sila poľa $d\mathbf{f} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$. Pri zmene polohy slučky vykonajú tieto sily prácu

$$\begin{aligned} dA &= \oint (I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \oint d\mathbf{r} \cdot (I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}) = -I \oint d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \times d\mathbf{s}) = \\ &= -I \oint [(d\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{s} = -I \oint [\mathbf{r}(d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{a}] \cdot d\mathbf{s} = \\ &= -I \oint \nabla \times [\mathbf{r}(d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{a}] \cdot d\mathbf{S} = I \oint (\mathbf{B} \times d\mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= I(\mathbf{B} \times d\mathbf{a}) \cdot \mathbf{S} = I\mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times d\mathbf{a}) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{M} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

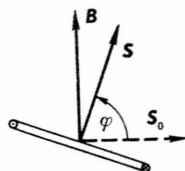
lebo $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ a $\nabla \mathbf{r}$ je tenzor identity, pričom $d\mathbf{a}$ značí elementárny uhol pootočenia slučky. Môžeme ho rozložiť na zložku $d\mathbf{a}_1$, spadajúcu do roviny vektorov $\mathbf{M}$ a $\mathbf{B}$ a na zložku $d\mathbf{a}_2$ na túto rovinu kolmú. Práca síl poľa bude potom

$$dA = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{M} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}_2$$

lebo vektory $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$ a $d\mathbf{a}_1$ sú komplanárne.

Podľa tohoto výsledku, ak sa slučka bez zmeny svojho tvaru z polohy za základnú zvolenej, pri ktorej plošný vektor $\mathbf{S}$ bol na indukčné čiary poľa kolmý, pootočí o uhol φ , sily poľa vykonajú celkovú prácu (obr. 4.14)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\mu_0} \int (\mathbf{M} \times \mathbf{B}) \cdot d\varphi = \frac{1}{\mu_0} \int MB \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{\mu_0} MB \sin \varphi = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$



Obr. 4.14.

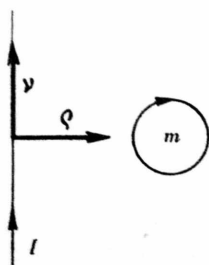
Vzhľadom na nami už zvolenú základnú polohu slučky polohová energia slučky s magnetickým momentom $\mathbf{M}$ v magnetickom poli o indukčii $\mathbf{B}$ je teda

$$E = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \quad (7)$$

kde $\mathbf{M}$ neznačí magnetizáciu nejakého prostredia, ale magnetický moment slučky.

Príklad 2. Vypočítame silu pôsobiacu na malú slučku s prúdom I' , ktorá sa nachádza v magnetickom poli dlhého priameho vodiča s prúdom I v polohe podľa obr. 4.14a. Podľa vzorca (4.3.4) a definície magnetického momentu uzavretého prúdového okruhu táto sila je

$$\mathbf{f} = I' \text{grad } \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \text{grad } \mathbf{H} \cdot \mu_0 I' \mathbf{S} = \text{grad } \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}$$



Obr. 4.14a

kde $\mathbf{m} = \mu_0 I' \mathbf{S}$ je magnetický moment slučky, pričom $\mathbf{S}$ je plošný vektor slučky podľa jej orientácie priradený.

Podľa vzorca (4.4.8) vo vzdialenosti r od dlhého priameho vodiča absolútna hodnota intenzity magnetického poľa vo vákuu je $H = \frac{I}{2\pi r}$, takže vektor $\mathbf{H}$ správne vyjadruje aj vzorec

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \boldsymbol{\tau} = \frac{I}{2\pi r} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}) = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{v} \times \mathbf{r} = -\frac{I}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \times \mathbf{v}$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor súhlasne rovnobežný so smerom magnetickej siločiar. Preto

$$\begin{aligned} \text{grad } \mathbf{H} &= -\frac{I}{2\pi} \left(\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right) \times \mathbf{v} = -\frac{I}{2\pi} \left(-\frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^4} + \frac{1}{r^2} \nabla \mathbf{r} \right) \times \mathbf{v} = \\ &= -\frac{I}{2\pi r^2} (-2\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) = -\frac{I}{2\pi r^2} (-\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{v} = \\ &= -\frac{I}{2\pi r^2} (\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\rho}) \end{aligned}$$

lebo v našom prípade vektor $\mathbf{r}$ nie je trojrozmerný vektor polohový s pevným počiatkom, ale jeho projekcia do roviny na priamy vodič kolmej, takže $\nabla \mathbf{r} = \text{grad } \mathbf{r}$ je dvojrozmerný tenzor identity, $\text{grad } \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}$. Pre silu $\mathbf{f}$ takto dostávame

$$\mathbf{f} = (\text{grad } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{m} = -\frac{I}{2\pi r^2} (\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{m} = -\frac{Im}{2\pi r^2} \boldsymbol{\rho}$$

pričom je $\mathbf{m} = \mu_0 I' \mathbf{S}$.

Príklad 3. Hoci predstava o existencii magnetických množstiev, s ktorou sme sa zaoberali v čl. 4.5, nevystihuje dokonale vlastnosti magnetických polí, pri niektorých výpočtoch sa pre svoju jednoduchosť dobre osvedčuje. V tomto príklade použijeme ju pre výpočet sily, ktorou sa k sebe priťahujú čelá permanentného magnetu tvaru toroidu, prerušeného úzkou medzerou vyplnenou materiálom s permeabilitou μ_0 . Permeabilitu vákuu budeme v tomto príklade výnimočne označovať znakom μ_0^* .

Ak medzera v magnete je dosť úzka, intenzita magnetického poľa $\mathbf{H}$ v materiáli magnetu sa rovná nule, ako sa nule rovná intenzita elektrického poľa na vonkajších stranách nabitého doskového kondenzátora. Preto — podľa Gaussovej vety — absolútna hodnota intenzity poľa v medzere nášho magnetu je

$$H_0 = \frac{\sigma - \sigma_0}{\mu_0^*} \quad (\text{a})$$

kde σ je plošná hustota magnetického množstva jestvujúceho na severnom čele magnetu v dôsledku magnetizácie $M = \sigma$ materiálu magnetu a $-\sigma_0$ následkom magnetizácie $M_0 = \sigma_0$ prostredia v medzere [pozri napríklad vzorec (1.9.13)].

Severné čelo magnetu prispieva k intenzite H_0 hodnotou len polovičnou. Na plošnú jednotku južného čela magnetu účinkuje teda sila

$$\frac{f}{S} = \frac{1}{2} H_0 \sigma$$

Pretože, podľa vzorca (a), je $\sigma = \mu_0^* H_0 + \sigma_0 = \mu_0^* H_0 + M_0 = B_0$ je správny aj vzťah $\frac{f}{S} = \frac{1}{2} B_0 H_0$, alebo

$$f = \frac{1}{2} B_0 H_0 S \quad (8)$$

kde, ako to dokážeme v čl. 6.4, $u_m = \frac{1}{2} B_0 H_0$ je hustota energie magnetického poľa v medzere nášho magnetu.

Možno dokázať, že výsledky (1.5.1) a (8) majú všeobecnú platnosť. V priečnom reze elektrickej silovej trubice s plošným obsahom S je ťah $f = \frac{DES}{2}$ a v trubici magnetickej ťah $f = \frac{BHS}{2}$.

4.7. Feromagnetizmus. V predchádzajúcom článku sme nazvali *feromagnetickými* látky, ktorých relatívna permabilita je mimoriadne veľká. Takýmito látkami sú najmä: železo, nikel, kobalt, ich zliatiny (napríklad zliatina železa a niklu, alebo železa, niklu a hliníka) a niektoré zliatiny neferomagnetických kovov (napríklad zliatina 61,5 % Cu, 23,5 % Mn a 15 % Al). Vysoká hodnota relatívnej permeability feromagnetických látok značí, že ich magnetizácia

$M = \kappa H = \frac{\kappa}{\mu} B = \frac{\mu - \mu_0}{\mu} B = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} B$ sa prakticky rovná indukcii v nich vytvoreného magnetického poľa, zatiaľ čo magnetizácia paramagnetických a diamagnetických látok v rovnako silných poliach je podstatne menšia.

Zvláštnosť feromagnetických látok nespočíva však len v tom, že ich magnetická permeabilita je veľká, ale i v tom, že: 1. ich permeabilita nie je konštantná a 2. ich magnetizácia sa čiastočne udrží aj po odstránení príčiny jej vzniku.

Vlastnosti feromagnetických látok sa študujú obyčajne tak, že sa vyšetruje závislosť ich magnetizácie M alebo indukcie B v nich vytvoreného magnetického poľa od príslušnej intenzity poľa H . Na meranie sa používa toroid