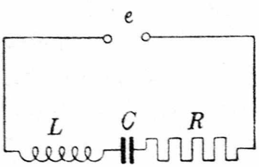
konštruujú sa však kolektorové motory len s malým výkonom. Keď žiadaný výkon je väčší, pre pohon striedavým prúdom sa s najväčšou obľubou používajú bezkolektorové trojfázové asynchrónne indukčné motory, využívajúce točivé pole magnetické. Podrobnejšie sa o nich zmienime v čl. 6.13.

6.10. Striedavý harmonický prúd v okruhu s ohmickým odporom, kapacitou a samoindukciou. Okruhu poľa *obr. 6.21* nech je vnútené striedavé napätie $e = e_0 \sin \omega t$. Pretože ako kapacita C, tak aj samoindukcia L predstavujú ďalšie zdroje elektromotorickej sily, $e_c = \frac{Q}{C}$, $e_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$, okruhom prechádza prúd daný vzorcom



Obr. 6.21.

$$I = \frac{e + e_c + e_i}{R}$$

podľa ktorého prúd I v okruhu splňuje diferenciálnu rovnicu

$$IR = e_0 \sin \omega t + \frac{1}{C} Q - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

teda aj rovnicu

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} I = \frac{\mathrm{d}(e_0 \sin \omega t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice pre ustálený stav nájdeme jednoducho tak, že pravú stranu rovnice nahradíme komplexným výrazom

$$\frac{\mathrm{d}(e_0 \cos \omega t + \mathrm{i} e_0 \sin \omega t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}t}$$

a nájdeme komplexné riešenie rovnice

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I^*}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I^*}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} I^* = \frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Riešením rovnice (1) bude potom reálna hodnota imaginárnej časti komplexného partikulárneho integrálu rovnice (2), lebo jej ľavá strana je v I^* lineárna a homogénna.

Za predpokladu, že práve tak ako okruhu vnútené vonkajšie napätie e, bude sa v ustálenom stave aj prúd I meniť s časom harmonicky a s rovnakou frekvenciou, môžeme písať:

$$I^* = I_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi)}$$

Bude potom

$$\frac{dI^*}{dt} = i\omega I_0\, e^{i(\omega t - \varphi)} = i\omega I^*, \qquad \frac{d^2I^*}{dt^2} = -\omega^2 I^*, \qquad \frac{de^*}{dt} = i\omega e^*$$

Dosadením týchto hodnôt do rovnice (2) dostávame rovnicu

$$-\omega^2 LI^* + i\omega RI^* + \frac{1}{C} I^* = i\omega e^*$$

z ktorej násobením imaginárnou jednotkou i a delením kruhovou frekvenciou ω vyplýva:

$$\left(\omega L\, i + R - \frac{1}{\omega C} i\right) I^* = e^*$$

$$I^* = \frac{e^*}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{e^*}{Z^*} \tag{3}$$

Konštantný komplexný výraz $Z^* = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ volá sa *komplexný odpor* okruhu.

Podľa toho, čo sme vyššie povedali, hľadaný prúd I rovná sa reálnej hodnote imaginárnej časti komplexného výrazu (3).

Pretože absolútna hodnota podielu dvoch komplexných čísel rovná sa podielu absolútnych hodnôt delenca a deliteľa, absolútna hodnota komplexného prúdu je

$$I_0 = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4}$$

Intezita prúdu je vzhľadom na napätie vo fáze oneskorená o modul φ komplexného výrazu Z^*,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{5}$$

Hľadané riešenie rovnice (2), reálna hodnota imaginárnej časti komplexného výrazu I^*, je teda

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}} \sin(\omega t - \varphi) \tag{6}$$

Veličina $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ volá sa *impedancia* okruhu.

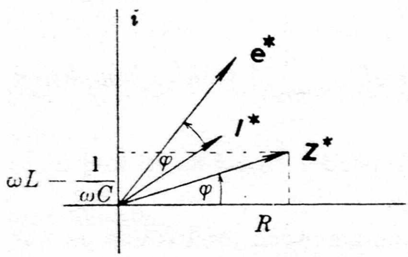
Podľa vzorca (5) je intenzita prúdu vo fáze za napätím, keď v okruhu prevláda samoindukcia $\left(\text{pri } R = 0 \text{ o } \frac{\pi}{2}\right)$, a pred napätím, keď v okruhu prevláda kapacita $\left(\text{pri } R = 0 \text{ tiež o } \frac{\pi}{2}\right)$.

Prúd podľa vzorca (4) má pri danom odpore R hodnotu najväčšiu, keď je $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, t. j. keď $\omega^2 = \frac{1}{CL}$, čiže keď $\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$, alebo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{CL}$$

Okruh je v tom prípade v rezonancii na frekvenciu okruhu vnúteného striedavého napätia a intenzita prúdu v okruhu je určená Ohmovým zákonom,

$$I = \frac{e_0}{R} \sin \omega t = \frac{e}{R}$$



Obr. 6.22.

lebo, podľa vzorca (5), je v tom prípade aj $\varphi = 0$.

Rovnica (3) umožňuje rýchle grafické vyšetrenie intenzity prúdu v komplexnej rovine. Obraz komplexného čísla e^* je totiž v tejto rovine vektor s konštantnou absolútnou hodnotou e_0, otáčajúci sa okolo začiatku konštantnou uhlovou rýchlosťou ω (*obr. 6.22*). Konštantný vektor Z^* nájdeme jednoducho vektorovým sčítaním jeho zložiek. Fázové oneskorenie prúdu za napätím udáva potom uhol, ktorý zviera tento vektor s reálnou osou. Maximálna hodnota prúdu je

$$I_0 = \frac{e_0}{Z} \tag{7}$$

Nech je u_{L0} amplitúda napätia na indukčnej cievke okruhu znázorneného na *obr. 6.21*, u_{C0} amplitúda napätia na kondenzátore a u_{R0} amplitúda napätia na ohmickom odpore. Keďže okruh je nerozvetvený, amplitúda prúdu I_0, daná vzorcom (4), pri každej frekvencii je tiež

$$I_0 = \frac{u_{L0}}{\omega L}, \qquad I_0 = \omega C u_{C_0}, \qquad I_0 = \frac{u_{R_0}}{R}$$

takže

$$u_{L0} = \omega L I_0 = \frac{\omega L e_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega L e_0}{Z}$$

$$u_{C0} = \frac{e_0}{\omega C Z} \qquad u_{R0} = \frac{R e_0}{Z}$$

Za rezonancie sú tieto napätia

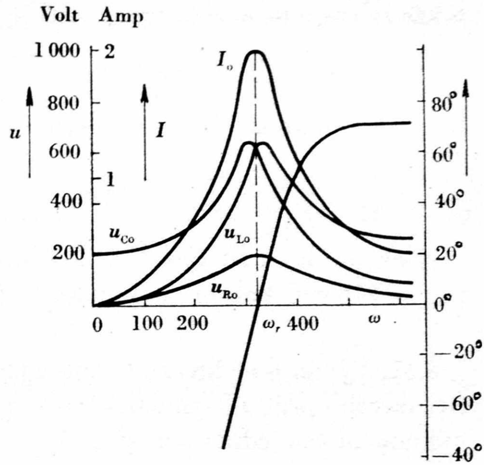
$$u_{L0} = \omega L \, . \, \frac{e_0}{R} = u_{C0}$$

$$u_{C0} = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{e_0}{R} = u_{L0}$$

$$u_{R0} = R \, . \, \frac{e_0}{R} = e_0$$

Podľa týchto výsledkov za rezonancie rovnako veľké napätia u_{L0} a u_{C0} môžu byť aj mnohonásobne väčšie ako okruhu vnútené napätie e_0. Napríklad ak $e_0 = 200$ volt, $L = 1$ henry, $C = 10$ mikrofarad, $R = 100$ ohm, pri $\omega = 1/\sqrt{LC} = 316\ \mathrm{s}^{-1}$ je $u_{L0} = u_{C0} = 640$ volt.

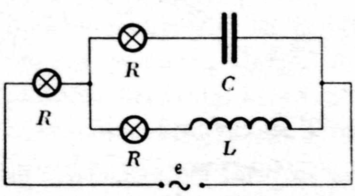
Grafické obrazy závislostí amplitúd prúdu I_0, napätí u_{L0}, u_{C0} a u_{R0} a fázového oneskorenia φ od kruhovej frekvencie ω okruhu vnúteného napätia $e = e_0 \sin \omega t$ pri vyššie uvedených hodnotách amplitúdy okruhu vnúteného napätia e_0 a parametrov siete L, C a R podáva *obr. 6.23.*



Obr. 6.23.

Príklad 1. Metódou komplexných harmonických funkcií času vypočítame prúdy v sieti podľa *obr. 6.24*, ktorej je vnútené striedavé harmonické napätie $e = e_0 \sin \omega t$, za predpokladu, že je splnená podmienka rezonancie $\omega^2 CL = 1$. Správnosť postupu v zmysle predošlých úvah si čitateľ môže ľahko overiť sám.

Veličiny vzťahujúce sa na nerozvetvenú (rozvetvenú) časť siete budeme označovať indexom *1* (*2*), veličiny vzťahujúce sa na hornú (dolnú) časť rozvetvenia indexom *21* (*22*) a veličiny vzťahujúce sa na sieť ako celok písmenami bez indexov.



Obr. 6.24.

V tom prípade bude $Z_1^* = R$. Komplexný odpor rozvetvenej časti siete vypočítame z rovnice

$$\frac{1}{Z_2^*} = \frac{1}{R - \dfrac{\mathrm{i}}{\omega C}} + \frac{1}{R + \mathrm{i}\omega L} = \frac{2R}{R^2 + \dfrac{L}{C}}$$

$$Z_2^* = \frac{R}{2} + \frac{L}{2RC}$$

$$Z^* = Z_1^* + Z_2^* = \frac{3R}{2} + \frac{L}{2RC} = \frac{3R^2C + L}{2RC}$$

Podľa práve získaného výsledku vo všeobecnosti komplexný odpor siete je v našom prípade reálny a ak by odpory R boli zanedbateľne malé, impedancia siete ako celku by bola nekonečne veľká. Pre prúd v nerozvetvenej časti siete vychádza

$$I_{10} = e_0 \frac{2RC}{3R^2C + L}$$

takže napätie na rozvetvenej časti je

$$e_{20} = e_0 - RI_{10} = e_0 \frac{R^2C + L}{3R^2C + L}$$

Rovnako veľké prúdy vo vetvách sú teda

$$I_{210} = I_{220} = \frac{e_0(R^2C + L)}{(3R^2C + L)\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}$$

Nech je $R = 10$ ohm, $L = 1$ henry, $C = 10$ mikrofarad, $e_0 = 50$ volt a $\omega = 316\ \mathrm{s}^{-1}$. Potom $I_{10} \doteq 0{,}01$ A, $I_{210} = I_{220} \doteq 0{,}16$ A.

6.11. Výkon a efektívna hodnota striedavého prúdu a napätia. Výkon zdroja striedavého prúdu harmonického nájdeme ako strednú hodnotu premenlivého výkonu za čas jednej periódy.

$$N = \frac{1}{T}\int_0^T eI\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T e_0I_0 \sin \omega t \,.\, \sin(\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e_0I_0(\sin^2 \omega t \,.\, \cos\varphi - \sin\omega t \,.\, \cos\omega t \sin\varphi)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e_0I_0 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \cos\varphi \,.\, \mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T e_0I_0 \sin\omega t \,.\, \cos\omega t \,.\, \sin\varphi \,.\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e_0I_0}{2} \cos\varphi \,.\, \mathrm{d}t = \frac{e_0I_0}{2}\cos\varphi \qquad (1)$$

lebo ostávajúce dva integrály v hraniciach od 0 po T sa rovnajú nule.

Efektívnou hodnotou striedavého prúdu I_e nazýva sa prúd jednosmerný, pri ktorom sa v ohmickom odpore vyvinie rovnaké teplo ako daným prúdom