

chádza vinutím prvej cievky prúd  $I_1$ , vinutím druhej cievky prúd  $I_2$ . Tieto prúdy splňujú diferenciálne rovnice:

$$I_1 = \frac{e_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}}{R_1}, \quad I_2 = \frac{-L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}}{R_2}$$

alebo

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 = e_1 \quad (1)$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = 0$$

Riešenie týchto rovníc nájdeme pre ustálený stav najrýchlejšie opäť tak, že pravú stranu prvej rovnice nahradíme komplexnou funkciou času  $e^* = e_{10} \cos \omega t + i e_{10} \sin \omega t = e_{10} e^{i\omega t}$  a nájdeme komplexné riešenie takto upravených rovníc. Hľadané riešenie bude dané reálnou hodnotou imaginárnej časti riešenia komplexného. Pre komplexné prúdy  $I_1^*$  a  $I_2^*$  môžeme písať:

$$I_1^* = I_{10} e^{i(\omega t - \varphi_1)}, \quad I_2^* = I_{20} e^{i(\omega t - \varphi_2)}$$

$$\frac{dI_1^*}{dt} = \omega i I_1^*, \quad \frac{dI_2^*}{dt} = \omega i I_2^*$$

Dosadením do rovnice (1) dostávame:

$$\begin{aligned} \omega i L_1 I_1^* + \omega i M I_2^* + R_1 I_1^* &= e^* \\ \omega i L_2 I_2^* + \omega i M I_1^* + R_2 I_2^* &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Z posledných dvoch lineárnych rovníc môžeme vypočítať  $I_1^*$  a  $I_2^*$ , resp.  $I_1$  a  $I_2$ . Indukovaná elektromotorická sila v sekundárnom vinutí je daná súčinnom  $R_2 I_2$ .

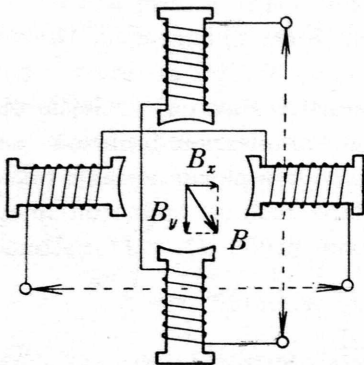
**6.13. Dvojfázové a trojfázové systémy prúdov.** Predstavme si, že dva rovinné závit s rovinami odklonenými od seba o  $\pi/2$  sa otáčajú v homogénnom magnetickom poli okolo osi, ktorá je na indukčné čiary poľa kolmá, uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Začiatky závitov nech sú vzájomne spojené a prostredníctvom zberného krúžka pripojené ku svorke zariadenia  $S_0$ ; konce závitov nech sú podobným spôsobom pripojené ku svorkám  $S_1$  a  $S_2$ . Medzi svorkami  $S_1$  a  $S_0$ , resp.  $S_2$  a  $S_0$ , budú potom s časom harmonicky sa meniace napätia:

$$e_1 = e_0 \sin \omega t$$

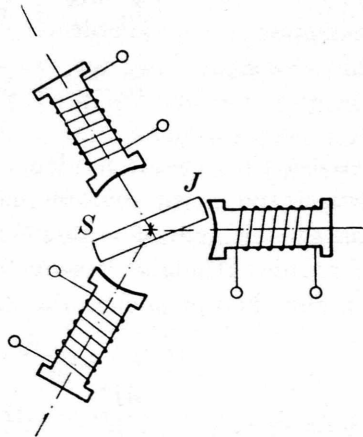
$$e_2 = e_0 \sin (\omega t - \pi/2) = -e_0 \cos \omega t \quad (1)$$

O prúdoch  $I_1 = \frac{e_1}{R} = \frac{e_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$  a  $I_2 = \frac{e_2}{R} = I_0 \sin (\omega t - \pi/2)$ , ktoré môžeme od týchto svoriek odoberať, hovoríme, že tvoria *dvojfázový systém prúdov*.

Medzi svorkami  $S_1$  a  $S_2$  je napätie  $e_{12} = e_1 - e_2 = e_0[\sin \omega t - \sin (\omega t - \pi/2)] = e_0 \sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4)$ , ako sa o tom ľahko môžeme presvedčiť grafickým sčítaním našich harmonických funkcií s rovnakou frekvenciou (pozri čl. 2.21 prvého dielu tejto učebnice).



Obr. 6.26.



Obr. 6.27.

Vedme prúdy  $I_1$  a  $I_2$  do dvoch dvojitých cievok (obr. 6.26) s osami na seba kolmými. V strede zariadenia superpozíciou dvoch vo fáze proti sebe o  $\pi/2$  posunutých, s časom harmonicky sa meniacich a skrížených magnetických polí vznikne potom výsledné magnetické pole so zložkami:

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \sin \omega t = B_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ B_y &= -B_0 \cos \omega t = B_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

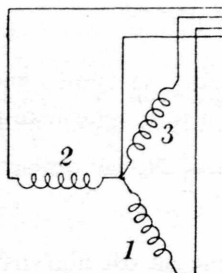
Podľa týchto výsledkov abs. hodnota magnetickej indukcie výsledného poľa je  $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = B_0 = \text{const.}$  Smer vektora  $\mathbf{B}$  zvierá však s osou  $X$  s časom sa meniaci uhol  $\alpha = \omega t - \frac{\pi}{2}$ .

V strede zariadenia je teda magnetické pole charakterizované vektorom magnetickej indukcie, ktorý má konštantnú abs. hodnotu, avšak sa v rovine osí  $XY$  rovnomerne otáča, v našom prípade v zmysle — pri pozorovaní zhora — proti pohybu hodinových ručičiek. Takéto magnetické pole sa nazýva *točivým poľom magnetickým*.

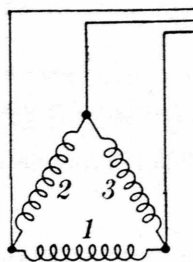
V elektrotechnickej praxi sa však pre vznik točivých magnetických polí používajú skoro výlučne len *trojfázové systémy prúdov*, z ktorých každý nasledujúci je vzhľadom na predošlý vo fáze oneskorený o  $120^\circ = 2\pi/3$ . Ich zdrojom môžu byť tri cievky s rovinami od seba odklonenými o  $120^\circ$ , otáčajúce sa rovnomerne v homogénnom magnetickom poli. V praxi používaná konštrukcia generátorov trojfázového systému striedavých prúdov je však iná a je schematicky znázornená na obr. 6.27. Sú to tri cievky s osami odklonenými od seba vždy o  $120^\circ$ , uložené na obvode kruhu, vo vnútri ktorého sa otáča elektromagnet budený jednosmerným prúdom z pomocného zdroja, s uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Vo vinutiach cievok sa tým indukujú elektromotorické sily s časovým priebehom približne:

$$e_1 = e_0 \sin \omega t, \quad e_2 = e_0 \sin \left( \omega t - \frac{2}{3} \pi \right), \quad e_3 = e_0 \sin \left( \omega t - \frac{4}{3} \pi \right)$$

Pre odber prúdu sa cievky generátora trojfázového systému prúdov spájajú buď do *hviezdy* (obr. 6.28), buď do *trojuholníka* (obr. 6.29).



Obr. 6.28.



Obr. 6.29.

Pri spojení do hviezd začiaky všetkých troch cievok sú vzájomne spojené a pripojené k tzv. *nulovému vodiču*, ktorý je vždy spojený aj so zemou. Medzi voľnými koncami napríklad prvých dvoch cievok je v tom prípade napätie

$$e_{12} = e_1 - e_2 = e_0 \left[ \sin \omega t - \sin \left( \omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \right] = e_0 \sqrt{3} \sin \left( \omega t + \frac{1}{6} \pi \right)$$

Amplitúda napätia medzi voľnými koncami ktorýchkoľvek dvoch cievok je teda v pomere  $\sqrt{3} : 1$  väčšia ako amplitúda napätia na jedinej cievke. To isté platí aj o efektívnych hodnotách.

V praxi efektívne napätie na cievke býva 220 voltov, takže efektívne napätie medzi voľnými koncami dvoch cievok („napätie medzi dvoma fázami“) je  $220 \sqrt{3}$  voltov  $= 220 \cdot 1,73$  voltov  $= 381$  voltov.

Spojenie cievok generátora trojfázového prúdu do trojuholníka umožňuje

okolnosť, že  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ . Inakšie by v cievkach generátora bol prúd, aj keby ku generátoru nebol pripojený nijaký spotrebič.

Presvedčíme sa ešte jednoduchým výpočtom, že aj pomocou trojfázového systému striedavých prúdov možno vytvoriť točivé magnetické pole, keď sa prúdy tohto systému privádzajú do cievok usporiadaných podobne ako v generátore trojfázového prúdu (obr. 6.27). Keď do cievok takéhoto zariadenia privedieme striedavé prúdy trojfázového systému prúdov,  $I_1 = I_0 \sin \omega t$ ,  $I_2 = I_0 \sin (\omega t - 2\pi/3)$ ,  $I_3 = I_0 \sin (\omega t - 4\pi/3) = I_0 \sin (\omega t + 2\pi/3)$ , v strede zariadenia vznikne superpozíciou troch polí magnetické pole, ktorého zložky sú:

$$\begin{aligned} B_x &= B_1 + B_{2x} + B_{3x} = \\ &= B_0 [\sin \omega t + \cos 120^\circ \sin (\omega t - 120^\circ) + \cos 120^\circ \sin (\omega t + 120^\circ)] = \\ &= B_0 (\sin \omega t + 2 \cos^2 120^\circ \sin \omega t) = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_y &= B_{2y} + B_{3y} = \\ &= B_0 [\cos 30^\circ \sin (\omega t - 120^\circ) + \cos 150^\circ \sin (\omega t + 120^\circ)] = \\ &= B_0 \cos 30^\circ (-2 \cos \omega t \sin 120^\circ) = -\frac{3}{2} B_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

O magnetickom poli, ktorého pravouhlé zložky sa týmto spôsobom menia s časom, podľa vzorcov (2) však už vieme, že je to magnetické pole, v ktorom vektor magnetickej indukcie s abs. hodnotou  $\frac{3}{2} B_0$  sa otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega$ .

Keď v točivom magnetickom poli umiestnime na osi uložený permanentný magnet (pozri obr. 6.27), po udelení dostatočne veľkého začiatočného rotačného impulzu magnet sa bude otáčať okolo svojej osi uhlovou rýchlosťou rovnajúcou sa uhlovej rýchlosti  $\omega$  točivého magnetického poľa. Zariadenie predstavuje jednu z rozličných konštrukcií tzv. *synchrónnych motorov*. Pre pohon trojfázovým prúdom v praxi sa však častejšie používajú *trojfázové asynchrónne indukčné motory*, ktoré ako prvý zostrojil Tesla r. 1888.

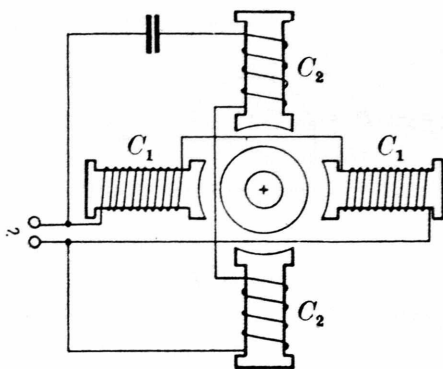
Predstavme si, že v točivom magnetickom poli je na osi uložená cievka z izolovaného drôtu, s koncami nakrátko spojenými, tzv. *kotva* alebo napr. len dutý kovový valec. Keby točivé magnetické pole bolo budené otáčajúcimi sa permanentnými magnetmi, podľa Lencovho pravidla vznikli by v kotve indukované prúdy takých smerov, že by sa snažili otáčajúce sa magnety zastaviť. Podľa princípu akcie a reakcie to však znamená, že otáčajúce sa magnety budením indukovaných prúdov v kotve účinkujú na kotvu silami, ktorými sa kotva roztočí v tomže zmysle, v akom sa otáčajú magnety. Pretože náhradou rotujúcich magnetov točivým magnetickým poľom sa na veci nič



nemení, je jasné, že v točivom magnetickom poli účinkuje na kotvu dvojica síl s momentom  $D$ , súhlasne rovnobežným s vektorom uhlovej rýchlosti  $\omega$  točivého magnetického poľa.

Veľkosť momentu  $D$  podstatne závisí od rozdielu  $\omega - \omega' = \omega_s$  uhlových rýchlostí  $\omega$  poľa a  $\omega'$  kotvy ktorý sa volá *sklz*. Keby sa sklz rovnal nule, čiže keby sa kotva motora otáčala synchronne s poľom, nemienil by sa s časom magnetický indukčný tok v kotve, nevznikali by teda v nej indukované prúdy a moment  $D$  by sa rovnal nule. V skutočnosti sa v práve opisovanom, napr. trojfázovom asynchrónnom motore synchronný chod nikdy nedosiahne, vždy je  $\omega' < \omega$ . Keď sa pri chode motora jeho zaťaženie zväčší, zmenší sa uhlová rýchlosť  $\omega'$  jeho otáčania, t. j. zväčší sa aj sklz  $\omega_s$ . V dôsledku toho sa potom v kotve rýchlejšie mení magnetický indukčný tok, takže sa v nej indukujú silnejšie prúdy a výkon stroja sa zväčší. Podobne ako kolektorové motory aj asynchrónny indukčný motor si svoj výkon reguluje teda sám podľa svojho zaťaženia. Sklz stroja pri danom výkone sa obyčajne udáva v percentách, určených

$$s = \frac{\omega - \omega'}{\omega} 100 \%$$



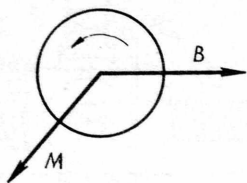
Obr. 6.30.

Na ukončenie tohto článku pripomenieme ešte, že točivé magnetické pole možno vytvoriť aj pomocou jednofázového striedavého prúdu v zariadení, ktoré schematicky je znázornené na obr. 6.30. Cievka  $C_1$  je tvorená veľkým počtom závitov tenšieho drôtu, takže jej indukčnosť je veľká a prúd v nej, podľa vzorca (5) v čl. 6.10, je vzhľadom na napätie vonkajšieho zdroja prúdu oneskorený. V okruhu cievky  $C_2$  je v sérii zaradený kondenzátor, takže prúd v nej, podľa tohože vzorca (5) v čl. 6.10 je vo fáze pred napätím. Na tomto princípe sa konštruujú jednofázové bezkolektorové indukčné motory s tzv. umelou druhou fázou.

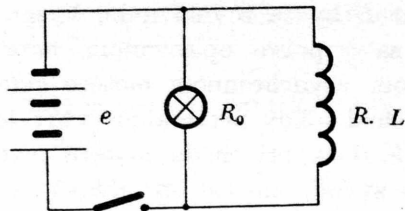
Je veľmi zaujímavé a aj technicky významné, že po roztočení jednofázového bezkolektorového indukčného motora jeho umelú fázu možno aj odpojiť a motor napriek tomu beží ďalej. Vysvetlenie je jednoduché.

Predstavme si, že v homogénnom magnetickom poli budenom jednofázovým striedavým prúdom, v ktorom vektor magnetickej indukcie mení sa teda s časom podľa vzorca  $B = B_0 \sin \omega t$ , otáča sa dutý kovový valec s vodivými

základňami spôsobom naznačeným na obr. 6.31. Keby sa valec netočil, jestvovali by v ňom indukované prúdy v rovinách na vektor  $\mathbf{B}$  kolmých s magnetickými momentami so smerom vektora  $\mathbf{B}$  nesúhlasne rovnobežnými. Keď sa však valec otáča, vektor  $\mathbf{M}$  je touto rotáciou v jej zmysle pootočený. Tým vzniká mechanická dvojica síl s momentom — podľa vzorca (4.3.5) —  $\mathbf{D} = \mathbf{IS} \times \mathbf{B} = \mathbf{M} \times \mathbf{H}$ , kde  $\mathbf{H}$  je intenzita magnetického poľa budeného v rotore jednofázovým striedavým prúdom, ktorá otáčanie rotora podporuje.



Obr. 6.31.



Obr. 6.32.

### Úlohy na cvičenie

1. Kruhový vodič s polomerom  $R$  sa nachádza v pokoji v magnetickom poli, v polohe na indukčné čiary kolmej, ktorého indukcia sa s časom lineárne zmenšuje. V čase  $t = 0$  je indukcia  $B = B_0$ , v čase  $t = t_0$  je  $B = 0$ . Aká elektromotorická sila sa indukuje vo vodiči? ( $e_t = \pi R^2 B_0 / t_0$ )

2. Aká elektromotorická sila sa indukuje v priamom vodiči dĺžky  $l = 15$  cm, keď tento rotuje v homogénnom magnetickom poli indukcie  $B = 0,5$  tesla v rovine na smer poľa kolmej, okolo osi idúcej jeho koncovým bodom, s frekvenciou  $n = 60/\text{s}$ ? ( $e_t = 2,12$  volt)

3. Vypočítajte efektívne napätia na svorkách kondenzátora a bezodporovej indukčnej cievky v zapojení podľa obr. 6.21, ak  $e = 220$  volt,  $R = 10$  ohm,  $C = 1$  mikrofaraď,  $L = 2$  henry a  $\omega = 2\pi \cdot 50/\text{s}$ ! ( $u_C = 274$  volt,  $u_L = 54$  volt)

4. Vypočítajte prúd v odpore  $R_0$  v zapojení podľa obr. 6.32 a jeho závislosť od času po odpojení zdroja jednosmerného prúdu bez vnútorného odporu, ktorého elektromotorická sila je  $e = 4,5$  volt, ak  $R_0 = 18$  ohm, indukčnosť cievky  $L = 1$  henry a jej ohmický odpor  $R = 1$  ohm! ( $I_0 = 0,25$  A,  $I = 4,5 e^{-Rt/L}$  A)

5. Tlmivkou a kondenzátorom o kapacite  $C = 10\mu\text{F}$ , ktoré sú spojené za sebou, prechádza prúd  $I = 1$  A. Sú pripojené na sieť s napätím  $u = 120$  volt a frekvenciou  $n = 50/\text{s}$ . Ohmický odpor tlmivky je  $R = 120$  ohm. Vypočítajte koeficient samoindukcie tlmivky! ( $L \doteq 1$  henry)