Rovnica (7) je v našom poradí 4. *rovnica Maxwellova*. Vektor $\boldsymbol{i}_p = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ sa z dôvodov historických nazýva *Maxwellovým posuvným prúdom*.

Maxwell vyslovil aj predpoklad, že aj v poliach s časom sa meniacich vektory $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{B}$ spĺňajú rovnice (1) a (2), ktoré sme nazvali *1.* a *2. rovnicou Maxwellovou*. Štyri Maxwellove rovnice, ktoré v tvare diferenciálnom vyjadrujú vlastnosti a vzťahy medzi štyrmi elektrické a magnetické pole charakterizujúcimi vektormi $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$, sú teda:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \varrho \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Doplňujú ich rovnice:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{i} = \varkappa \boldsymbol{E} \tag{10}$$

ktoré umožňujú zmenšiť počet vektorových funkcií vystupujúcich v Maxwellových rovniciach na dve.

Pretože v nijakom magnetickom poli vektor $\boldsymbol{B}$ a podobne v nijakom elektrickom poli vektor $\boldsymbol{D}$ sa nemôžu trvale rovnomerne meniť, znamená to, že v poliach s časom sa meniacich aj derivácie týchto vektorov sú premenlivé. S ohľadom na to z 3. a 4. Maxwellovej rovnice vyplýva, že s časom sa meniace magnetické pole je súčasne aj s časom sa meniacim elektrickým poľom a naopak. Takéto polia sú teda vlastne len jedno pole a nazýva sa *elektromagnetickým* poľom. Jeho vlastnosti vyjadrujú práve sformulované štyri rovnice Maxwellove.

7.2. Rovinná elektromagnetická vlna. Parciálne diferenciálne rovnice Maxwellove (7.1.8) vyjadrujú fyzikálne poznatky, ktoré v tvare integrálnom boli zväčša už skôr známe. Novinkou, pravda, neobyčajne významnou, je v nich len zavedenie posuvného prúdu. Maxwellova zásluha o rozvoj teórie elektrických a magnetických polí spočíva však aj v tom, že rôznorodé poznatky o elektrických a magnetických javoch, získané pokusne pri štúdiu polí statických, alebo len pomerne pomaly sa meniacich, zovšeobecnil na polia ľubovoľne rýchle sa meniace a zhrnul do štyroch vektorových rovníc, čím celá teória nadobudla pozoruhodnú jednoduchosť, jednotnosť a prehľadnosť.

Zavedenie posuvného prúdu do sústavy rovníc elektrických a magnetických polí je dôležité najmä preto, lebo zo získaných rovníc vyplýva možnosť takých dejov v jednotnom elektromagnetickom poli, ktoré majú charakter vlnenia. Pre rýchlosť šírenia sa tohto vlnenia vyplynula z Maxwellových rovníc hodnota rovnajúca sa rýchlosti postupu svetelných vĺn. Tým bol Maxwell privedený k rozšíreniu svojej teórie elektromagnetického poľa aj na javy *optické*, t. j. k vytvoreniu *elektromagnetickej teórie svetla*, podľa ktorej svetlo je elektromagnetické vlnenie, ktoré sa od elektromagnetického vlnenia realizovateľného pomocou makroskopických prostriedkov líši len tým, že jeho vlnová dĺžka je pomerne veľmi malá.

V tomto článku pomocou Maxwellových rovníc dokážeme najprv možnosť elektromagnetického vlnenia a potom odvodíme už len rovnice vyjadrujúce šírenie sa rovinnej elektromagnetickej vlny v neohraničenom homogénnom a izotropnom nevodivom prostredí.

Maxwellove rovnice v znení platnom pre takéto prostredie ($\mathbf{i} = 0$, $\varrho = 0$, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) sú:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Parciálnym derivovaním poslednej z týchto rovníc podľa času dostávame rovnicu

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

z ktorej použitím aj predposlednej rovnice zo súboru (1) vyplýva rovnica

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon\mu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon\mu} \Delta \mathbf{E}$$

t. j. rovnica

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \Delta \mathbf{E} \tag{2a}$$

lebo podľa prvej z rovníc (1) je $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$.

Podobným postupom by sme ľahko odvodili aj rovnicu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \Delta \mathbf{B} \tag{2b}$$

Pretože už z mechaniky vieme, že rovnice (2a) a (2b) sú diferenciálne rovnice vlnenia šíriaceho sa rýchlosťou $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, dôkaz, že v elektromagnetickom poli sú možné vlnivé deje, je vykonaný. Okrem toho zo vzorca

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{3}$$

vyplýva, že elektromagnetické vlny sa vo vákuu šíria rýchlosťou

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}86\,.\,10^{-12}\,\mathrm{M^{-3}K^{-1}S^4A^2}\,.\,4\pi\,.\,10^{-7}\,\mathrm{MKS^{-2}A^{-2}}}} =$$
$$= \frac{10^9}{\sqrt{4\pi\,.\,0{,}886}} \doteq 3\,.\,10^8\ \mathrm{ms^{-1}} = 3\,.\,10^5\ \mathrm{km\,.\,s^{-1}}$$

rovnajúcou sa teda rýchlosti svetla.

Majme na mysli rovinné vlnenie elektromagnetické, ktoré sa v neohraničenom homogénnom a izotropnom nevodivom prostredí šíri súhlasne rovnobežne s kladným smerom osi X. V takomto vlnení vektor elektrický je závislý od času a miesta podľa vzorca

$$\mathbf{E} = \mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{a}$$

kde $\mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ je vektorová funkcia skalárnej premennej $p = t - \frac{x}{v}$. Podľa rovníc (1) vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ v elektromagnetickom vlnení nie sú od seba nezávislé. Aby sme našli závislosť vektora $\mathbf{B}$ od času a miesta v prípade, že vektor $\mathbf{E}$ sme už zvolili v tvare (a), vypočítame rot $\mathbf{E}$ a získaný výsledok dosadíme do tretej z rovníc (1). Dostávame:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) = \nabla \times \mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} \times \mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) =$$
$$= \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) = \mathbf{i} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}p}\left(-\frac{1}{v}\right) = -\frac{\mathbf{i}}{v} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}p}$$

takže, podľa tretej z rovníc (1) je

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mathbf{i}}{v} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}p} = \mathbf{i}\sqrt{\varepsilon\mu} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}p} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{i} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}p} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{i} \times \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Integrovaním tejto rovnice za predpokladu, že v čase $t = 0$ nebolo v priestore nijaké s časom sa nemeniace magnetické pole, vychádza:

$$\mathbf{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{i} \times \mathbf{E} \tag{4}$$

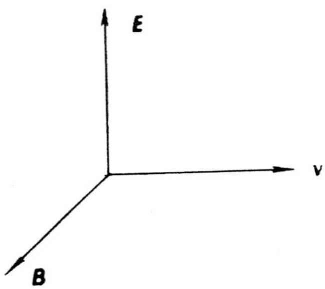
Dosadením tohto vzťahu do poslednej z rovníc (1) by sme sa mohli presvedčiť, že vzťah (4) vyhovuje aj tejto rovnici.

Podľa výsledku (4) v rovinnej vlne elektromagnetickej vektor $\mathbf{B}$ je ustavične kolmý nielen na vektor $\mathbf{E}$, ale aj na vektor $\mathbf{i}$, t. j. na smer postupu vlnenia. Ľahko dokážeme, že aj vektor $\mathbf{E}$ má túto vlastnosť. Vyplýva to z rovnice div $\mathbf{E} = 0$.

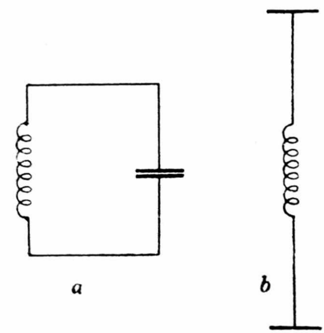
Podľa tejto rovnice vychodí:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} . \mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) = \mathbf{i} . \frac{\partial \mathbf{f}\left(t - \frac{x}{v}\right)}{\partial x} =$$

$$= \mathbf{i} . \left(-\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}p}\right) = -\frac{1}{v}\mathbf{i} . \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$



Obr. 7.1.



Obr. 7.2.

Integrovaním rovnice $\mathbf{i} . \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ — opäť za predpokladu, že pred vznikom vlnenia nebolo v priestore teraz nijaké elektrické pole — vychádza:

$$\mathbf{i} . \mathbf{E} = 0 \tag{5}$$

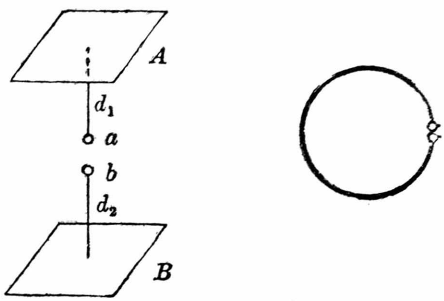
čo znamená, že vektor $\mathbf{E}$ je na vektor $\mathbf{i}$ skutočne kolmý.

Podľa rovníc (4) a (5) vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ sú oba na smer postupu vlnenia aj vzájomne na seba kolmé. Ich vzájomnú polohu znázorňuje *obr. 7.1*, na ktorom $\mathbf{v}$ značí rýchlosť postupu vlnenia. Vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ v tomto poradí v rovinnom vlnení tvoria teda systém pravotočivý. Okrem toho z rovnice (4) vyplýva aj tento vzťah medzi abs. hodnotami vektorov $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$,

$$B = \sqrt{\varepsilon\mu} E \tag{6}$$

Existenciu elektromagnetického vlnenia dokázal experimentálne Hertz r. 1887. Hertzove elektromagnetické vlny boli tlmené a vznikali v okolí iskrišťa tzv. *otvoreného* elektrického oscilátora. Uzavretý oscilátor, ktorý sa skladá z indukčnej cievky a kondenzátora, sme poznali už v čl. 6.6. V okolí takéhoto oscilátora (*obr. 7.2a*) vzniká len slabé elektromagnetické vlnenie, lebo magnetické pole je v ňom sústredené vnútri indukčnej cievky a pole elektrické vnútri kondenzátora. Z uzavretého oscilátora dostaneme otvorený, keď dosky jeho kondenzátora od seba čo najviac vzdialime, ako je to naznačené na *obr. 7.2b*. Elektrické pole otvoreného oscilátora vyplňuje celé jeho okolie, takže otvorený oscilátor sa lepšie hodí na vysielanie elektromagnetických vĺn.

Hertzov oscilátor sa skladal z dvoch kovových guľôčok a a b (*obr. 7.3*), ktoré boli pripojené k svorkám sekundárneho vinutia induktora, takže medzi nimi mohli preskakovať elektrické iskry, ktoré predstavovali krátkodobé vodivé spojenie obidvoch guľôčok. Guľôčky boli spojené s kovovými doskami A a B, predstavujúcimi otvorený kondenzátor, pomocou drôtikov d_1 a d_2, ktoré zastupovali indukčnú cievku. Pri každom preskočení elektrickej iskry vzniklo v okolí oscilátora tlmené elektromagnetické vlnenie, v ktorom elektrické siločiary pretínali vodorovnú rovinu súmernosti oscilátora kolmo, zatiaľ čo siločiary magnetické boli s ňou všade rovnobežné. Existenciu tohto vlnenia dokazoval Hertz pomocou svojho *elektromagnetického rezonátora*, ktorý mal tvar do kruhu stočeného drôtu, prerušeného na jednom mieste veľmi krátkym iskrišťom (*obr. 7.3*). Keď sa rezonátor držal v takej polohe, že jeho rovina splývala s osou otvoreného oscilátora, preskakovali v jeho iskrišti elektrické iskry.



Obr. 7.3.

7.3. Poyntingov žiarivý vektor. Pomocou Maxwellových rovníc odvodil Poynting výraz vyjadrujúci smer a hustotu prúdenia energie v elektromagnetickom poli, ktorý sa dnes nazýva *Poyntingovým žiarivým vektorom*.

Podľa Maxwella hustota energie v elektromagnetickom poli sa rovná súčtu jej hustôt pripadajúcich na elektrickú a magnetickú časť poľa, ktoré sú určené vzorcami (1.14.4) a (6.4.4). Celková energia vnútri uzavretej plochy, ktorá sa nachádza v elektromagnetickom poli, jestvujúcom v izotropnom prostredí, je preto

$$U = \int u \, d\tau = \int (u_e + u_m) \, d\tau = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\varepsilon E^2 + \mu H^2) \, d\tau$$