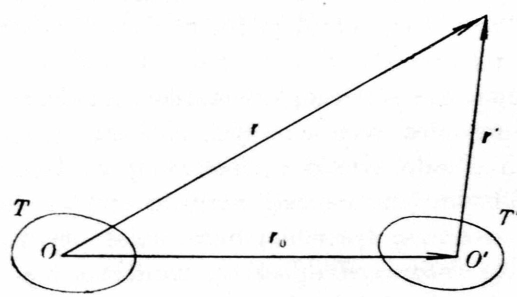
$= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$, nerovná sa teda rýchlosti $\mathbf{v}'$. Zo základných predstáv klasickej kinematiky podobný vzťah vyplýva aj pre šírenie sa vlnenia.

Za tejto situácie fyzici minulého storočia a ešte aj v prvých rokoch nášho storočia stáli pred rozhodnutím: alebo rozvíjať fyzikálne teórie aj naďalej na starých a dennou skúsenosťou potvrdzovaných predstavách o priestore a čase a v náuke o dejoch elektromagnetických byť v rozpore so starostlivo získanou experimentálnou skúsenosťou, alebo zotrvať na experimentálnom poznatku, že svetlo sa šíri vo všetkých inerciálnych sústavách tou istou a vo všetkých smeroch rovnakou rýchlosťou a primerane k tomu zmeniť predstavy o priestore a plynutí času. Vec rozriešil A. Einstein, ktorý v svojom diele „O elektrodynamike pohybujúcich sa telies", vydanom r. 1905, rozhodol sa pre vedecky jedine správnu druhú možnosť. Položil tak základy svojej, po dosť dlhých bojoch dnes už všeobecne uznávanej, tzv. *špeciálnej teórie relativity.*

8.2. Minkowského štvorrozmerný priestoro-čas. V teórii relativity sa bodovou udalosťou nazýva udalosť, ktorá sa odohráva vo veľmi malej (teoreticky nekonečne malej) časti priestoru a vo veľmi krátkom (teoreticky nekonečne krátkom) časovom intervale. Jej uloženie v priestore a čase sa nazýva *svetobodom.*

Po tejto úvodnej pripomienke majme na mysli telesá T a T' v ľubovoľnom vzájomnom pohybe a nejakú bodovú udalosť A, napríklad rozpad atómu nejakého rádioaktívneho prvku. Polohový vektor bodu O' telesa T' (*obr. 8.2*) vzhľadom na bod O telesa T nech je $\mathbf{r}_0$. Bod O' v čase t nech sa vzhľadom na teleso T pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}_0$. Okrem toho teleso T' nech sa vzhľadom na teleso T otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$.



Obr. 8.2.

Polohový vektor miesta, kde sa — podľa pozorovateľa viazaného na teleso T' v čase t' — prihodila udalosť A, vzhľadom na bod O' telesa T' nech je $\mathbf{r}'$. Polohový vektor tejže udalosti A, ktorá sa podľa pozorovateľa viazaného na teleso T prihodila v čase t, vzhľadom na bod O telesa T nech je $\mathbf{r}$. Podľa *obr. 8.2* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$. Okrem udalosti A vezmime si ešte inú, tiež bodovú udalosť B, v priestore aj čase veľmi blízku bodovej udalosti A, takže jej polohové vektory vzhľadom na body O a O' môžeme písať ako $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$, resp. $\mathbf{r}' + \mathrm{d}\mathbf{r}'$, a príslušné časy ako $t + \mathrm{d}t$, resp. $t' + \mathrm{d}t'$.

Predpokladajme ďalej, že nejaký skutočný alebo len myslený bod P sa pohybuje v okolí našich telies T a T' tak, že postupne splýval, t. j. bol postupne „očitým svedkom" bodovej udalosti A aj bodovej udalosti B. Keď jeho rýchlosti vzhľadom na telesá T a T' sú $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}'$, pre priestorové odľahlosti bodových udalostí A a B môžeme písať:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}t' \end{aligned} \tag{1}$$

Podľa klasickej kinematiky rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}'$ sú vo vzťahu, danom vzorcom

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}' \tag{2}$$

Spojením rovníc (1) a (2) vychádza:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}$$

alebo

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0\,\mathrm{d}t' + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}t' + \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{3}$$

pretože klasická kinematika (podľa Newtona čas plynie spôsobom od ničoho nezávislým) so samozrejmosťou považuje za správnu rovnicu $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$.

Keby teleso T' namiesto v náhodnom pohybe bolo vzhľadom na teleso T v pohybe translačnom, vzťah (3) by sa zjednodušil na rovnicu

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0\,\mathrm{d}t' + \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{4}$$

Podľa výsledkov (3) a (4) priestorová odľahlosť $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ dvoch bodových udalostí v priestore telesa T závisí nielen od priestorovej odľahlosti $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}'|$ týchže dvoch bodových udalostí v priestore telesa T', ale aj od ich časovej odľahlosti, ktorá podľa predstáv klasickej kinematiky vo vzťahu k obidvom telesám T a T' je rovnaká. Len ak je $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t = 0$, je vždy aj $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$. Slovami: v klasickej kinematike rovnaké sú vo všeobecnosti priestorové odľahlosti len súčasných bodových udalostí.

Podľa týchto výsledkov aj v klasickej kinematike priestorové odľahlosti bodových udalostí majú charakter relatívny. Podstatným obsahom Einsteinovej špeciálnej teórie relativity je, že podľa nej nielen priestorové, ale aj časové odľahlosti sú relatívne, t. j. vo vzťahu k dvom telesám (merané pozorovateľmi viazanými na dve rôzne telesá), aj keď ich vzájomný pohyb je len rovnomerná a priamočiara translácia, vo všeobecnosti $\mathrm{d}t \neq \mathrm{d}t'$. Vyplýva to zo základného princípu Einsteinovej špeciálnej teórie relativity, z princípu fyzikálnej rovnocennosti dvoch inerciálnych súradnicových sústav vo vzájomnom pohybe nielen pre deje mechanické, ale aj pre deje elektromagnetické a tým aj svetelné.

Aby sme sa o tom presvedčili, vezmime si ako bodovú udalosť č. 1 udalosť vyslania svetelneho signálu a ako udalosť č. 2 udalosť jeho zachytenia detektorom svetelného vlnenia. Súradnice a časy týchto dvoch bodových udalostí v inerciálnom súradnicovom systéme S, viazanom na teleso T, a v jeho stupnici času budeme označovať písmenami bez čiarok. Súradnice a časy týchže dvoch bodových udalostí v súradnicovom systéme S', viazanom na teleso T', ktoré vzhľadom na predošlé je v rovnomernom a priamočiarom translačnom pohybe s rýchlosťou $\mathbf{v}$, a v jeho stupnici času písmenami s čiarkami. Z princípu rovnocennosti dvoch inerciálnych sústav vo vzájomnom pohybe vyplýva, že v obidvoch sústavách sa svetlo šíri rovnakou rýchlosťou. Keď túto rýchlosť označíme písmenom c, budú splnené obidve rovnice:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2$$
$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' + y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = c^2(t_2' - t_1')^2$$

čiže rovnice:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$
$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0 \qquad (5)$$

Keď však udalosti 1. a 2. nebudú vyslanie a prijatie toho istého svetelného signálu, ale budú to dve náhodné bodové udalosti, čiže ak pôjde o dva náhodné svetobody, veličiny

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

a

$$s'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2$$

druhé mocniny tzv. *priestorovo-časových odľahlostí*, vo všeobecnosti nebudú sa rovnať nule. Ľahko sa však presvedčíme, že aj v tom prípade je $s'^2 = s^2$, teda $s' = s$.

Dôkaz. Priestoro-časové súradnice x, y, z a t svetobodu jednoznačne určujú jeho uloženie v priestore a čase a obrátene, teda súradnice x', y', z' a t' sú jednoznačnými funkciami premenných x, y, z a t a obrátene. Táto okolnosť nám umožňuje napríklad v druhej z rovníc (5) vystupujúce čiarkované premenné vyjadriť pomocou nečiarkovaných. Tým však dostávame vzťah medzi nečiarkovanými súradnicami týchže dvoch svetobodov, teda prvú z rovníc (5). To značí, že transformáciami $x' = x'(x, y, z, t)$ až $t' = t'(x, y, z, t)$, ktoré s ohľadom na homogenitu priestoru a času môžu byť len lineárne, sa výraz s'^2 mení na ks^2, teda $s'^2/s^2 = k$. Pretože však podľa vysloveného už základného predpokladu telesá T a T', na ktoré sú viazané súradnicové sústavy S a S' spolu s príslušnými zariadeniami na meranie času, sú fyzikálne rovnocenné, je aj $s^2/s'^2 = k$, čiže $s'^2 = s^2$ aj $s' = +\sqrt{s'^2} = +\sqrt{s^2} = s$. To bolo treba dokázať.

Priestoro-časová odľahlosť dvoch bodových udalostí

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} \tag{6}$$

nezávisí teda od toho, v akom inerciálnom súradnicovom systéme, doplnenom príslušnou stupnicou času, ju počítame.

Poznámka. Z homogenity priestoru a času vyplýva, že funkčná závislosť čiarkovaných súradníc od nečiarkovaných a obrátene je lineárna, napríklad podľa tejto úvahy: Majme na mysli veľmi malé posunutie svetobodu, ktorého súradnice sú x', y', z' a t'. Tomuto posunutiu zodpovedajúca zmena napríklad nečiarkovanej ypsilonovej súradnice je

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x'}\mathrm{d}x' + \frac{\partial y}{\partial y'}\mathrm{d}y' + \frac{\partial y}{\partial z'}\mathrm{d}z' + \frac{\partial y}{\partial t'}\mathrm{d}t'$$

Z homogenity priestoru a času vyplýva, že $\mathrm{d}y$ je funkciou len $\mathrm{d}x'$, $\mathrm{d}y'$, $\mathrm{d}z'$ a $\mathrm{d}t'$, nie však aj súradníc x', y', z' a t', t. j. v predchádzajúcej rovnici vystupujúce parciálne derivácie sú konštanty, z čoho lineárnosť transformácií, ktoré máme na mysli, vyplýva už bezprostredne.

Podľa tohto výsledku, zatiaľ čo v klasickej kinematike absolútny význam má rozdiel časov $t_2 - t_1$ a veličina $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ alebo jej druhá odmocnina, t. j. priestorová odľahlosť dvoch bodových udalostí, majú význam len relatívny, ako sme sa práve presvedčili, v Einsteinovej špeciálnej teórii relativity absolútny význam nemá ani časová odľahlosť $t_2 - t_1$ dvoch bodových udalostí, ani ich priestorová odľahlosť $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, ale veličina určená vzorcom (6).

S ohľadom na absolútny význam veličiny určenej vzorcom (6) možno hovoriť aj o polohovom vektore $\mathbf{r}_{12}^*$ bodovej udalosti č. 2 vzhľadom na bodovú udalosť č. 1 v tzv. *Minkowského štvorrozmernom priestore-čase*, definovanom tak, že $\sqrt{\mathbf{r}_{12}^* \cdot \mathbf{r}_{12}^*} = s$. Tento vektor je zrejme

$$\mathbf{r}_{12}^* = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k} + \mathrm{i}c(t_2 - t_1)\,\mathbf{l} \tag{7}$$

keď $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ sú jednotkové vektory súhlasne rovnobežné s osami pravouhlého a napríklad pravotočivého (trojrozmerného) súradnicového systému, $\mathbf{l}$ je jednotkový vektor v smere tzv. časovej osi a i je imaginárna jednotka. Pritom podobne ako vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ aj jednotkový vektor $\mathbf{l}$ splňuje rovnicu $\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1$ a okrem toho rovnice $\mathbf{i} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = 0$.

Poznámka: Hovoríme, že súradnicový systém osí X, Y a Z, viazaný na nejaké inerciálne tuhé teleso, spolu s predpisom na meranie času určujú tzv. *štvorrozmerný priestoro-časový súradnicový systém.* Pritom sa pod časovou osou rozumie súbor bodových udalostí, ktoré sa prihodili v ľubovoľnom čase v začiatku trojrozmerného súradnicového systému. Podobne napr. os X

štvorrozmerného súradnicového systému je súbor bodových udalostí, ktoré sa prihodili na osi X trojrozmerného súradnicového systému v čase $t = 0$.

Vzhľadom na bodovú udalosť, ktorá sa prihodila v začiatku na nejaké inerciálne teleso viazaného trojrozmerného súradnicového systému v čase $t = 0$, teda vzhľadom na začiatok štvorrozmerného časo-priestorového súradnicového systému, štvorrozmerný časo-priestorový polohový vektor inej bodovej udalosti (polohový vektor „svetobodu") je:

$$\mathbf{r}^* = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + \mathrm{i}ct\mathbf{l} \tag{8}$$

Keď zavedieme časovú súradnicu $u = \mathrm{i}ct$, môžeme písať aj:

$$\mathbf{r}^* = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + u\mathbf{l} \tag{9}$$

Pretože $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ je trojrozmerný polohový vektor bodovej udalosti vzhľadom na začiatok súradnicového systému osí X, Y a Z, vektor $\mathbf{r}^*$ možno písať ako súčet

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{t}$$

v ktorom $\mathbf{t} = u\mathbf{l} = \mathrm{i}ct\mathbf{l}$. Vektor $\mathbf{r}$ je priestorovou zložkou časo-priestorového polohového vektora $\mathbf{r}^*$ a vektor $\mathbf{t}$ je jeho časovou zložkou.

Na ukončenie tohto článku majme ešte na mysli dve telesá T a T', na ktoré viazané súradnicové systémy sú inerciálne a sú vo vzájomnom rovnomernom a priamočiarom translačnom pohybe. Keď si pozorovatelia viazaní na tieto telesá zvolia tú istú bodovú udalosť za začiatok svojich štvorrozmerných súradnicových systémov S a S', polohové vektory všetkých bodových udalostí teraz vzhľadom na spoločný začiatok obidvoch systémov budú totožné. Pre ľubovoľnú bodovú udalosť bude teda v tom prípade splnená rovnica

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + \mathrm{i}ct\mathbf{l} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' + \mathrm{i}ct'\mathbf{l}'$$

alebo

$$\mathbf{r} + \mathbf{t} = \mathbf{r}' + \mathbf{t}'$$

Ak $\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ je trojrozmerný tenzor identity, ľahko sa môžeme presvedčiť o správnosti vzťahov:

$$\mathbf{r}^* . \mathbf{I} = \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}^* . \mathbf{ll} = \mathbf{t} \tag{10ab}$$

$$\mathbf{r}^* . \mathbf{I}' = \mathbf{r}', \qquad \mathbf{r}^* . \mathbf{l}'\mathbf{l}' = \mathbf{t}' \tag{11ab}$$

Štvorrozmerný tenzor

$$\mathbf{I}^* = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} + \mathbf{ll} = \mathbf{I} + \mathbf{ll} \tag{12}$$

je zrejme tenzor identity v Minkowského priestoro-čase.