

8.3. Deformácia priestoru a času pohybom. Odvodíme najprv vzťahy medzi priestorovými, $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$, a časovými, $\mathbf{t}$ a $\mathbf{t}'$, zložkami štvorrozmerného polohového vektora $\mathbf{r}^*$ svetobodu v dvoch priestoro-časových súradnicových systémoch S a S' , definovaných pomocou dvoch pevných telies T a T' s inerciálnym priestorom, z ktorých teleso T' je vzhľadom na teleso T v rovnomernom a priamočiariom translačnom pohybe s rýchlosťou $\mathbf{v}$.

Za týchto okolností pre všetky bodové udalosti, ktoré sa prihodili v ľubovoľnom čase t v začiatku trojrozmerného súradnicového systému osí X' , Y' a Z' , sú splnené obidve rovnice:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= 0 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{v}t\end{aligned}\quad (1)$$

Rovnice (8.2.10a) a (8.2.11a) možno písať takto:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^* \cdot (\mathbf{I}^* - \mathbf{II}) &= \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^* \cdot (\mathbf{I}^* - \mathbf{I}'\mathbf{I}') &= \mathbf{r}'\end{aligned}$$

Odčítaním rovnice prvej od rovnice druhej dostávame:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}^* \cdot (\mathbf{II} - \mathbf{I}'\mathbf{I}') \quad (2)$$

Podobne pre vektory $\mathbf{t}$ a $\mathbf{t}'$ z rovníc (8.2.10b) a (8.2.11b) vyplýva:

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t} - \mathbf{r}^* \cdot (\mathbf{II} - \mathbf{I}'\mathbf{I}') \quad (3)$$

Symetrický tenzor

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{II} - \mathbf{I}'\mathbf{I}' \quad (4)$$

vystupujúci vo vzorcoch (2) a (3) s ohľadom na ich zrejmý význam sa volá *tenzor deformácie priestoru a času pohybom*.

Jednotkový vektor $\mathbf{I}'$ vyplýva z podmienok (1). Ich spojením so vzorcom (2) dostávame:

$$0 = \mathbf{v}t + (\mathbf{v}t + ic\mathbf{t}\mathbf{I}) \cdot (\mathbf{II} - \mathbf{I}'\mathbf{I}')$$

alebo

$$\mathbf{v} + ic\mathbf{I} = (\mathbf{v} + ic\mathbf{I}) \cdot \mathbf{I}'\mathbf{I}'$$

Z poslednej rovnice bezprostredne vyplýva, že $\mathbf{I}'$ je vektor s vektorom $\mathbf{v} + ic\mathbf{I}$ rovnobežný. Možno preto písať:

$$\mathbf{I}' = \lambda(\mathbf{v} + ic\mathbf{I})$$

Keďže okrem toho vektor $\mathbf{I}'$ spĺňa rovnicu $\mathbf{I}' \cdot \mathbf{I}' = 1$, je $\lambda^2(v^2 - c^2) = 1$, alebo $\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{c^2 - v^2}}$. Podľa týchto výsledkov je:

$$l' = \pm i \frac{\mathbf{v} + icl}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \pm \frac{i}{c} \frac{\mathbf{v} + icl}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \pm \frac{\beta}{ic} (\mathbf{v} + icl)$$

kde $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Keď sa čas v oboch sústavách S a S' počíta kladne

smerom do budúcnosti, pre $v = 0$ musí byť $l' = l$. To znamená, že v poslednom vzorci v tom prípade platí znamienko $+$, takže

$$l' = \frac{\beta}{ic} (\mathbf{v} + icl) \quad (5)$$

Majme na mysli nejakú tyč, ktorá v systéme súradnicových osí X' , Y' a Z' , t. j. vzhľadom na teleso T' , je v pokoji. Jej dĺžka pre pozorovateľa, ktorý vzhľadom na teleso T je v pokoji, môže byť len priestorová odľahlosť jej koncových bodov v tomže čase t . Z rovnice (2) pre túto priestorovú odľahlosť ($\Delta t = 0$, teda $\Delta \mathbf{r}^* = \Delta \mathbf{r}$) vyplýva:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}' &= \Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \cdot (ll' - l'l') = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{r} \cdot l'l' = \\ &= \Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \cdot \frac{\beta^2}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{v} + icl\mathbf{v} + icv\mathbf{l} - c^2ll) = \\ &= \Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}\mathbf{v} + icv\mathbf{l}}{c^2 - v^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Vidíme, že zmena dĺžky nastáva len vtedy, ak ona nie je kolmá na vektor rýchlosti $\mathbf{v}$. V prípade, že je rovnobežná s vektorom $\mathbf{v}$, zo vzorca (6) dostávame:

$$\Delta \mathbf{r}' = \Delta \mathbf{r} + \frac{v^2 \Delta \mathbf{r} + icv l \Delta \mathbf{r}}{c^2 - v^2} = \frac{c^2 \Delta \mathbf{r} + icv l \Delta \mathbf{r}}{c^2 - v^2} = \beta^2 \left(\Delta \mathbf{r} + \frac{i}{c} v l \Delta \mathbf{r} \right)$$

teda

$$(\Delta \mathbf{r}')^2 = \beta^4 \left[(\Delta \mathbf{r})^2 - \frac{v^2}{c^2} (\Delta \mathbf{r})^2 \right] = \beta^2 (\Delta \mathbf{r})^2$$

t. j.

$$\Delta \mathbf{r}' = \beta \Delta \mathbf{r}$$

alebo

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{1}{\beta} \Delta \mathbf{r}' < \Delta \mathbf{r}' \quad (7)$$

Podľa tohto výsledku pri pohybe telies nastáva skracovanie ich rozmerov rovnobežných so smerom pohybu.

Majme na mysli teraz dve bodové udalosti, ktoré sa vzhľadom na teleso T' prihodili v tom istom mieste v časoch t'_1 a t'_2 a vo vzťahu k telesu T v časoch

t_1 a t_2 . Z rovnice (3), keďže teraz $\Delta \mathbf{r}^*$ je len $\Delta \mathbf{t}'$, lebo $\Delta \mathbf{r}' = 0$, pre príslušné časové odľahlosti vyplýva vzťah $\Delta \mathbf{t}' = \Delta \mathbf{t} - \Delta \mathbf{t}' \cdot (II - I'I')$, alebo, keďže je $\Delta \mathbf{t} = ic\Delta tI$ a $\Delta \mathbf{t}' = ic\Delta t'I'$,

$$I\Delta t = I'\Delta t' + I' \cdot (II - I'I') \Delta t'$$

t. j. s ohľadom na vzorec (5) $\Delta t = (I' \cdot I) \Delta t' = \beta \Delta t'$, čiže

$$\Delta t = \beta \Delta t' > \Delta t' \quad (8)$$

Čas sa teda pohybom predlžuje, avšak *v pohybujúcej sa sústave čas plynie pomalšie*, pretože $\Delta t' < \Delta t$.

Treba si, pravda, uvedomiť, že efekty, vyjadrené vzorcami (7) a (8), sú pri rýchlostiach, ktoré možno dosiahnuť v makrofyzike, zanedbateľne malé, lebo

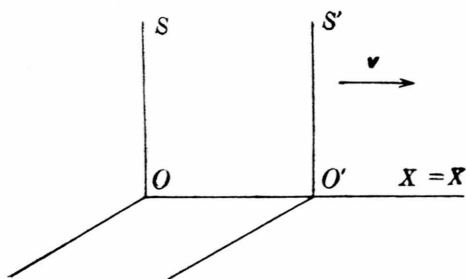
v týchto prípadoch koeficient $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ je len o veľmi málo väčší ako 1.

Odvodíme ešte vzťahy medzi čiarkovanými a nečiarkovanými priestorovými súradnicami a časovými údajmi bodovej udalosti (svetobodu) v prípade, že osi X a X' dvoch trojrozmerných pravouhlých súradnicových sústav S a S' splývajú (obr. 8.3) a začiatok systému S' sa sunie pozdĺž osi X systému S v jej kladnom smere rýchlosťou v . Okrem toho budeme predpokladať, že spoločným začiatkom počítania času v oboch sústavách je udalosť splývania začiatkov systémov S a S' . Dostaneme tak tzv. *Lorentzove transformačné*

vzorce, ktorý ich odvodil ešte pred vybudovaním špeciálnej teórie relativity, aby takto, vtedy bez hlbšieho vedeckého zdôvodnenia, zachránil platnosť Maxwellových rovníc elektromagnetického poľa v inerciálnych priestoroch všetkých telies vo vzájomnom rovnomernom a priamočiaramo pohybe.

V tomto prípade vektor rýchlosti systému S' , vzhľadom na systém S , je $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$. Pretože súradnice x, y, z a $u =$

$= ict$, resp. x', y', z' a $u' = ict'$ predstavujú ortogonálne súradnice svetobodu, pričom $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1$, transformujú sa pri prechole zo štvorrozmernej súradnicovej sústavy S do sústavy S' práve tak ako vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a $\mathbf{l}$. Vzorec pre transformovanie časovej súradnice u dostaneme preto jednoducho tak, že vo vyjadrení jednotkového vektora $\mathbf{l}'$ vzorcom (5) namiesto $\mathbf{l}'$



Obr. 8.3.

napišeme $u' = ict'$, namiesto l súčin $u = ict$ a namiesto vektora i súradnicu x . Tým dostaneme hneď:

$$ict' = \frac{\beta}{ic} (vx + ic \cdot ict) = \frac{\beta}{ic} (vx - c^2 t)$$

alebo

$$t' = \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (9)$$

Majme na mysli svetobod určený súradnicami $(0, y, 0, 0)$, inými slovami bodovú udalosť, ktorá sa prihodila v čase $t = 0$ na osi Y . S ohľadom na voľbu systémov S a S' a práve odvodený vzorec (9) čiarkované súradnice tohože svetobodu sú $(0, y', 0, 0)$, takže $\mathbf{r}^* = y' \mathbf{j}' = y \mathbf{j}$. Z posledného vzťahu, keďže jednotkové vektory sa transformujú rovnako ako príslušné súradnice, vyplýva bezprostredne, že je $y' = y$ aj $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$. Podobne by sme dostali vzťahy $z' = z$, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$.

Vyjadrenie súradnice x' pomocou nečiarkovaných premenných nájdeme tak, že odvodíme vzťah medzi vektormi i' a i . Pretože vektor i' je kolmý na vektory $\mathbf{j}'$ a $\mathbf{k}'$, je kolmý aj na vektory $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$. Je preto lineárnou kombináciou len vektorov i a l :

$$i' = ai + bl$$

Podmienka vzájomnej kolmosti vektorov i' a l' poskytuje rovnicu $i' \cdot l' = 0$, t. j. s ohľadom aj na vzorec (5) rovnicu $(ai + bl) \cdot (v + icl) = 0$, alebo

$$av + icb = 0$$

Okrem toho $i' \cdot i' = 1$, t. j.

$$a^2 + b^2 = 1$$

Riešenie posledných dvoch rovníc dáva:

$$a = \pm \beta, \quad b = \pm i \frac{v}{c} \beta$$

takže (použiť možno len znamienko $+$, lebo pre $v = 0$ je $i' = i$)

$$i' = \beta \left(i + i \frac{v}{c} l \right) \quad (10)$$

Podľa tohto výsledku, keď v ňom namiesto i' , i a l napíšeme x' , x a ict , dostávame:

$$x' = \beta(x - vt) \quad (11)$$

Riešením rovníc (9) a (11) vychádza:

$$x = \beta(x' + vt') \quad (12)$$

$$t = \beta \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (13)$$