8.4. Základy relativistickej elektrodynamiky. Majme na mysli elementárne priestoro-časové posunutie bodu dané diferenciálmi $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ a $\mathrm{d}t$ čiže posunutie bodu v priestore, ktoré sa uskutočnilo v čase $\mathrm{d}t$. Pretože veličina $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2$ je od voľby inerciálneho súradnicového systému nezávislá [pozri (8.2.6)], nie je od tejto voľby závislá ani veličina

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)} \qquad (1)$$

Nazývame ju *absolútnym elementárnym časovým intervalom*, ktorý uplynul medzi dvoma udalosťami, ktoré sa odohrali v dvoch sebe blízkych svetobodoch. Pri elementárnom posunutí bodu, aké máme na mysli, je $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = v^2\,\mathrm{d}t^2$. Preto abs. elementárny čas, za ktorý sa toto posunutie uskutočnilo, je:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{d}t \qquad (2)$$

Vektor

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^*}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r} + \mathrm{i}c\mathbf{l}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \beta(\mathbf{v} + \mathrm{i}c\mathbf{l}) \qquad (3)$$

ktorý je od voľby súradnicového systému tiež nezávislý, nazýva sa *štvorrozmernou rýchlosťou* pohybu bodu v priestoro-čase.

Maxwellove rovnice elektromagnetického poľa v znení platnom pre vákuum sú:

$$\operatorname{div} \varepsilon_0\mathbf{E} = \varrho, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0\varrho\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Sčítaním $\mu_0\mathrm{i}c\mathbf{l}$ násobku rovnice prvej a rovnice štvrtej dostávame rovnicu

$$\mu_0\mathrm{i}c(\nabla \cdot \varepsilon_0\mathbf{E})\,\mathbf{l} + \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\varrho(\mathbf{v} + \mathrm{i}c\mathbf{l}) = \frac{\mu_0\varrho}{\beta}\mathbf{v}^*$$

alebo, keďže

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \qquad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{i}ct}\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}\mathbf{E}\right) = \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}\mathbf{l}\mathbf{E}\right)$$

a

$$\nabla \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{I} = \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{I})$$

kde $\mathbf{I}$ je trojrozmerný tenzor identity,

$$\left(\nabla \cdot \frac{\mathrm{i}}{c}\mathbf{E}\right)\mathbf{l} + \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{I}) + \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}\mathbf{l}\mathbf{E}\right) = \frac{\mu_0\varrho}{\beta}\mathbf{v}^*$$

Štvorrozmerný Hamiltonov operátor je:

$$\square = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} + \boldsymbol{l}\frac{\partial}{\partial u} = \nabla + \boldsymbol{l}\frac{\partial}{\partial u} = \nabla - \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{l}\frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$

Pretože vo výrazoch $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} \times \mathbf{I}$ a ∇ nevystupuje jednotkový vektor $\boldsymbol{l}$, predošlú rovnicu môžeme písať aj takto:

$$\square \cdot \left[\boldsymbol{B} \times \mathbf{I} + \frac{\mathrm{i}}{c}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{E})\right] = \frac{\mu_0 \varrho}{\beta}\boldsymbol{v}^* \tag{5}$$

Sčítaním $\boldsymbol{l}$-násobku Maxwellovej rovnice v našom poradí druhej a i/c-násobku rovnice tretej dostávame rovnicu

$$(\nabla \,.\, \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{l} + \nabla \times \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{E} + \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

t. j.

$$(\nabla \,.\, \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{l} + \nabla \,.\left(\frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{E} \times \mathbf{I}\right) - \boldsymbol{l}\,.\,\frac{\partial \boldsymbol{l}\boldsymbol{B}}{\partial u} = 0$$

ktorú, keďže ani vo výrazoch $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{l}$ a ∇ nevystupuje jednotkový vektor $\mathbf{I}$, môžeme písať aj takto:

$$\square \cdot \left[\frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{E} \times \mathbf{I} + (\boldsymbol{B}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{B})\right] = 0 \tag{6}$$

Rovnice (5) a (6) sú opäť Maxwellove rovnice elektromagnetického poľa, napísané však s použitím predstavy o štvorrozmernom priestoro-čase. Vystupujúce v nich tenzory

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B} \times \mathbf{I} + \frac{\mathrm{i}}{c}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{E}) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{G} = \frac{\mathrm{i}}{c}(\boldsymbol{E} \times \mathbf{I}) + (\boldsymbol{B}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{B}) \tag{8}$$

o ktorých ľahko možno dokázať, že sú ekvivalentné v tom zmysle, že ak poznáme jeden z nich, tým je už daný aj druhý, sa volajú *tenzory elektromagnetického poľa*. Napriek tomu, že vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ sú rôzne podľa toho, či v danom elektromagnetickom poli ich určujeme v systéme S alebo S', ktoré sú vo vzájomnom pohybe, z princípu ekvivalencie všetkých inerciálnych sústav aj s ohľadom na elektromagnetické deje vyplýva, že tenzory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ sú od voľby inerciálneho súradnicového systému nezávislé. V dôsledku toho, keďže operátor $\square$ je od tejto voľby tiež nezávislý, nie je od tejto voľby závislý ani podiel ϱ/β, vystupujúci v rovnici (5). Preto keď objemovú hustotu elektrického náboja v systéme, v ktorom je tento náboj v pokoji, označíme ϱ_0, bude: $\dfrac{\varrho}{\beta} = \varrho_0$.

Predstavme si, že v nejakom telese, ktoré vzhľadom na inerciálny systém S' sa nepohybuje, je náboj q_0, ktorý je v ňom rovnomerne rozložený pri objemovej hustote ϱ_0. Systém S' nech je vzhľadom na systém S v rovnomernom a priamočiarom translačnom pohybe s rýchlosťou $\mathbf{v}$. Za týchto okolností touto rýchlosťou sa pohybuje v systéme S aj naše teleso s nábojom, v dôsledku čoho pre pozorovateľa viazaného na systém S sú dĺžkové rozmery telesa rovnobežné so smerom jeho pohybu skrátené v pomere $1 : \beta$. V tomže pomere je zmenšený aj jeho objem, takže keď V_0 je objem telesa určený v systéme S', je správna úmera $V : V_0 = 1 : \beta$ alebo $V = V_0/\beta$. Keď v telese je elektrický náboj pri hustote ϱ, tento náboj je $q = V\varrho = V_0\varrho/\beta = V_0\varrho_0 = q_0$, lebo podiel ϱ/β — ako už vieme — sa pohybom nemení.

Podľa týchto výsledkov zatiaľ čo objemová hustota elektrického náboja v telese je funkciou rýchlosti jeho pohybu, náboj sám sa pohybom nemení. Tento výsledok bude nám veľmi užitočný pri hľadaní základných zákonov relativistickej mechaniky.

Tenzory $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ môžeme výhodne použiť na odvodenie vektorov $\mathbf{E}'$ a $\mathbf{B}'$ v inerciálnom systéme S', ktorý sa vzhľadom na systém S pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$, keď je známe elektromagnetické pole v priestore S alebo obrátene. Zo vzorcov (7) a (8) totiž bezprostredne vyplýva, že je

$$\mathbf{E} = \mathrm{i}c\mathbf{I} \,.\, \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \mathbf{G} \,.\, \mathbf{I} \tag{9}$$

Musí byť preto:

$$\mathbf{E}' = \mathrm{i}c\mathbf{I}' \,.\, \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{G} \,.\, \mathbf{I}' \tag{10}$$

8.5. Základy relativistickej mechaniky. Majme na mysli dva trojrozmerné súradnicové systémy S a S' (*obr. 8.3*). Ich súhlasne orientované osi X a X' nech splývajú a systém S' nech sa pohybuje v kladnom smere osi X systému S rýchlosťou v. Pri vhodne zvolenom, v obidvoch systémoch spoločnom začiatku počítania času premenné x' a t' sú závislé od premenných x a t podľa vzorcov (8.3.9) a (8.3.11):

$$x' = \beta(x - vt) \tag{1}$$

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{2}$$

Pre zložky rýchlostí a zrýchlení pohybu ľubovoľného bodu P v obidvoch systémoch S a S' vyplývajú z týchto rovníc vzťahy:

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \dfrac{v}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{3}$$