Predstavme si, že v nejakom telese, ktoré vzhľadom na inerciálny systém $S'$ sa nepohybuje, je náboj $q_0$, ktorý je v ňom rovnomerne rozložený pri objemovej hustote $\varrho_0$. Systém $S'$ nech je vzhľadom na systém $S$ v rovnomernom a priamočiarom translačnom pohybe s rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Za týchto okolností touto rýchlosťou sa pohybuje v systéme $S$ aj naše teleso s nábojom, v dôsledku čoho pre pozorovateľa viazaného na systém $S$ sú dĺžkové rozmery telesa rovnobežné so smerom jeho pohybu skrátené v pomere $1 : \beta$. V tomže pomere je zmenšený aj jeho objem, takže keď $V_0$ je objem telesa určený v systéme $S'$, je správna úmera $V : V_0 = 1 : \beta$ alebo $V = V_0/\beta$. Keď v telese je elektrický náboj pri hustote $\varrho$, tento náboj je $q = V\varrho = V_0\varrho/\beta = V_0\varrho_0 = q_0$, lebo podiel $\varrho/\beta$ — ako už vieme — sa pohybom nemení.

Podľa týchto výsledkov zatiaľ čo objemová hustota elektrického náboja v telese je funkciou rýchlosti jeho pohybu, náboj sám sa pohybom nemení. Tento výsledok bude nám veľmi užitočný pri hľadaní základných zákonov relativistickej mechaniky.

Tenzory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ môžeme výhodne použiť na odvodenie vektorov $\boldsymbol{E}'$ a $\boldsymbol{B}'$ v inerciálnom systéme $S'$, ktorý sa vzhľadom na systém $S$ pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, keď je známe elektromagnetické pole v priestore $S$ alebo obrátene. Zo vzorcov (7) a (8) totiž bezprostredne vyplýva, že je

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}c\boldsymbol{I} \,.\, \boldsymbol{F} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{G} \,.\, \boldsymbol{I} \tag{9}$$

Musí byť preto:

$$\boldsymbol{E}' = \mathrm{i}c\boldsymbol{I}' \,.\, \boldsymbol{F} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{G} \,.\, \boldsymbol{I}' \tag{10}$$

**8.5. Základy relativistickej mechaniky.** Majme na mysli dva trojrozmerné súradnicové systémy $S$ a $S'$ (*obr. 8.3*). Ich súhlasne orientované osi $X$ a $X'$ nech splývajú a systém $S'$ nech sa pohybuje v kladnom smere osi $X$ systému $S$ rýchlosťou $v$. Pri vhodne zvolenom, v obidvoch systémoch spoločnom začiatku počítania času premenné $x'$ a $t'$ sú závislé od premenných $x$ a $t$ podľa vzorcov (8.3.9) a (8.3.11):

$$x' = \beta(x - vt) \tag{1}$$

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{2}$$

Pre zložky rýchlostí a zrýchlení pohybu ľubovoľného bodu $P$ v obidvoch systémoch $S$ a $S'$ vyplývajú z týchto rovníc vzťahy:

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{3}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\beta\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\beta\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\beta\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}$$

Podobným postupom by sme ľahko odvodili aj vzťahy:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{1}{\beta^3\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)^3}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{v}{c^2}\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\beta^2\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)^3} \tag{4}$$

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{v}{c^2}\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)}{\beta^2\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Na rozdiel od kinematiky Galileiho a Newtona podľa vzorcov (4) zrýchlenia tohože bodu v sústavách $S$ a $S'$ nie sú teda rovnaké, a to napriek tomu, že ich relatívny pohyb je len rovnomerná a priamočiará translácia. Preto, ak zotrváme na stanovisku, že základné princípy Einsteinovej špeciálnej teórie relativity sú správne, súčin $m\boldsymbol{a}$, v ktorom $\boldsymbol{a}$ značí zrýchlenie, nemôžeme považovať za vhodné vyjadrenie silového pôsobenia čohokoľvek na hmotný bod hmotnosti $m$. Značilo by to, že na hmotný bod účinkujúca sila $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ veľmi zložitým spôsobom závisí od jeho pohybového stavu, v rozličných súradnicových sústavách nerovnakého. Pre túto príčinu bolo treba do určitej miery pozmeniť pojmový obsah fyzikálnych veličín nazývaných *hmotnosť* a *sila*, ale len tak, aby v prípade malých rýchlostí sa na veci nič nezmenilo.

Pri výstavbe relativistickej mechaniky bol zvolený tento postup: Pretože silový zákon Newtonov je vo veľmi dobrej zhode s výsledkami pozorovania pohybov s nie príliš veľkými rýchlosťami, bolo veľmi prirodzené použiť tento zákon na definíciu veľkostí síl a hmotností, avšak na rozdiel od newtonovskej mechaniky s podmienkou, že pri jeho používaní pre tento účel silami sa nemení pohybový stav telies sa už pohybujúcich, ale silami sa uvádzajú telesá zo stavu pokoja do pohybu. Ich takto určená hmotnosť sa nazýva pokojovou hmotnosťou. Budeme ju označovať $m_0$.

Vzťah medzi silou a jej dynamickým účinkom sa potom našiel vhodnou ďalšou teoretickou úvahou. Jedna z možných ciest je táto:

Predstavme si, že v systéme $S'$, o ktorom bola reč už na začiatku tohto článku, nachodí sa hmotný bod s pokojovou hmotou $m_0$, nesúci elektrický náboj $e$, vzhľadom na systém $S'$ v relatívnom pokoji. Okrem toho predpokladajme, že v systéme $S'$ je len s časom sa nemeniace elektrické pole a nijaké pole magnetické. Splnené sú potom rovnice:

$$m_0 \frac{d^2x'}{dt'^2} = eE'_x, \qquad m_0 \frac{d^2y'}{dt'^2} = eE'_y, \qquad m_0 \frac{d^2z'}{dt'^2} = eE'_z \tag{5}$$

Zložky zrýchlenia, vystupujúce v týchto rovniciach a vzťahujúce sa na systém $S'$, môžeme vyjadriť pomocou vzorcov (3) a (4) a zložky intenzity elektrického poľa, ako ho vníma pozorovateľ viazaný na súradnicový systém $S'$, pomocou prvého zo vzorcov (8.4.10) a vzorcov (8.3.5), (8.3.10) a (8.4.7). Náboj $e$ netreba vyjadrovať, lebo o ňom už vieme, že je nezávislý od svojho pohybového stavu.

V súradnicovom systéme $S$ náboj $e$, ktorý sa v ňom pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$, podlieha sile $\mathbf{f} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E})$, takže $f_x = eE_x$, lebo vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je na os $X$ kolmý.

Podľa vzorca (8.4.10) je:

$$\mathbf{E}' = \mathrm{i}c\mathbf{l}' \,.\, \mathbf{F} = \mathrm{i}c\mathbf{l}' \,.\left[\mathbf{B} \times \mathbf{l} + \frac{\mathrm{i}}{c}(\mathbf{E}\mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{E})\right] =$$

$$= \mathrm{i}c\frac{\beta}{\mathrm{i}c}(\mathbf{v} + \mathrm{i}c\mathbf{l}) \,.\left[\mathbf{B} \times \mathbf{l} + \frac{\mathrm{i}}{c}(\mathbf{E}\mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{E})\right] = \beta\left[\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\mathrm{i}}{c}(\mathbf{v} \,.\, \mathbf{E})\,\mathbf{l} + \mathbf{E}\right]$$

takže

$$E'_x = \mathbf{E}' \,.\, \mathbf{i}' = \mathbf{E}' \,.\, \beta\left(\mathbf{i} + \mathrm{i}\frac{v}{c}\mathbf{l}\right) = \beta^2\left(E_x - \frac{v^2}{c^2}E_x\right) = E_x = \frac{f_x}{e}$$

teda $eE'_x = f_x$. Podobne je:

$$eE'_y = e\mathbf{E}' \,.\, \mathbf{j}' = e\mathbf{E}' \,.\, \mathbf{j} = \beta e(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \,.\, \mathbf{j} = \beta f_y$$

$$eE'_z = e\mathbf{E}' \,.\, \mathbf{k}' = e\mathbf{E}' \,.\, \mathbf{k} = \beta f_z$$

Keďže v našom prípade je $\dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dz'}{dt'} = 0$, takže podľa vzorcov (3), je aj $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dz}{dt} = 0$ a $\dfrac{dx}{dt} = v$, podľa vzorcov (4) je:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \beta^3 \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \beta^2 \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \beta^2 \frac{d^2z}{dt^2}$$

Použitím všetkých týchto výsledkov z rovníc (5) dostávame rovnice:

$$m_0\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = f_x, \qquad m_0\beta \frac{d^2y}{dt^2} = f_y, \qquad m_0\beta \frac{d^2z}{dt^2} = f_z \tag{6}$$

Rovnice (6) vyjadrujú relativisticky spresnený Newtonov zákon sily. S ohľadom na to, že sú správne, len keď sa hmotný bod s hmotnosťou $m_0$ pohybuje rovnobežne s osou $X$, súčin $m_0\beta^3$ sa volá *pozdĺžnou hmotnosťou* súčin $m_0\beta$ *priečnou hmotnosťou.*

Avšak keď zavedieme veličinu

$$m = \beta m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{7}$$

ktorá sa nazýva (*skutočnou*) hmotnosťou hmotného bodu, pričom — na rozlíšenie — veličina $m_0$ sa potom volá jeho *pokojovou* hmotnosťou, ľahko sa môžeme presvedčiť, že

$$m_0\beta^3 \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(m\dot{x})}{\mathrm{d}t}, \qquad m_0\beta \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(m\dot{y})}{\mathrm{d}t}, \qquad m_0\beta \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(m\dot{z})}{\mathrm{d}t}$$

S ohľadom aj na tieto výsledky rovnice (6) môžeme spojiť do vektorovej rovnice

$$\boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

Keď teda Newtonov zákon sily nepíšeme v obvykle používanom tvare $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, ale v tvare $\boldsymbol{f} = \dfrac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}$, je aj relativisticky správny, avšak v tom prípade písmeno $m$ musí znamenať veličinu definovanú vzorcom (7).

Odvodíme ešte relativistický vzorec pre kinetickú energiu hmotného bodu. Podľa svojho významu táto energia sa rovná práci, ktorá je potrebná na to, aby sa hmotný bod dostal z pokoja do pohybu. Kinetická energia hmotného bodu je teda:

$$K = \int \boldsymbol{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{H} = \int \mathrm{d}(\boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{H}) - \int \boldsymbol{H} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} =$$

$$= \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{H} - \int \frac{m_0\boldsymbol{v} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - \int \frac{m_0 v \,\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Keď použijeme substitúciu $u^2 = 1 - \dfrac{v^2}{c^2}$, podľa ktorej je $v\,\mathrm{d}v = -c^2 u\,\mathrm{d}u$, dostávame:

$$\int_0^v \frac{m_0 v \,\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = -\int_1^u m_0 c^2 \,\mathrm{d}u = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Preto

$$K = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) = c^2(m - m_0) \tag{9}$$

Podľa tohto výsledku zväčšeniu hmoty o $m - m_0 = \Delta m$ zodpovedá zväčšenie energie $\Delta E = K = c^2 \Delta m$. Preto bol vyslovený predpoklad, novšími výskumami najmä v oblasti atomistiky stále potvrdzovaný, že **každá hmota** znamená aj jestvovanie úmerného množstva energie

$$E = mc^2 \tag{10}$$

Rovnica (10) je matematickým vyjadrením tzv. ***princípu ekvivalencie hmoty a energie***, ktorý je významný najmä pri premenách atómových jadier.