

Cauchyho model

Väčšina priehľadných neabsorbujúcich materiálov, ako sú optické sklá majú vo viditeľnej oblasti svetla index lomu, ktorý závisí od vlnovej dĺžky približne ako $1/\lambda^2$. Hovoríme o tzv. *normálnej disperzii*. Tento disperzný vzťah objavil pri analýze experimentálnych dát francúzsky optik a matematik Augustin-Luis Cauchy v roku 1837.

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Na lepší opis niektorých materiálov používame aj členy vyšších rádov $1/\lambda^4$, $1/\lambda^6$, atď.

Optické sklo BK7

Ide o najpoužívanější typ skla v optike známe aj ako *korunové sklo*. Vo viditeľnom svetle má index lomu len o niečo väčší ako 1,5. Jeho Cauchyho parametre sú: $A = 1,5046$, $B = 3,54 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^2$. Nasledujúci program nakreslí graf závislosti indexu lomu tohto skla od vlnovej dĺžky v rozsahu 370 nm až 780 nm.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Nastavenie desatinnej čiarky namiesto bodky v grafoch
import locale
locale.setlocale(locale.LC_ALL, "sk_SK")
plt.rcParams["axes.formatter.use_locale"] = True

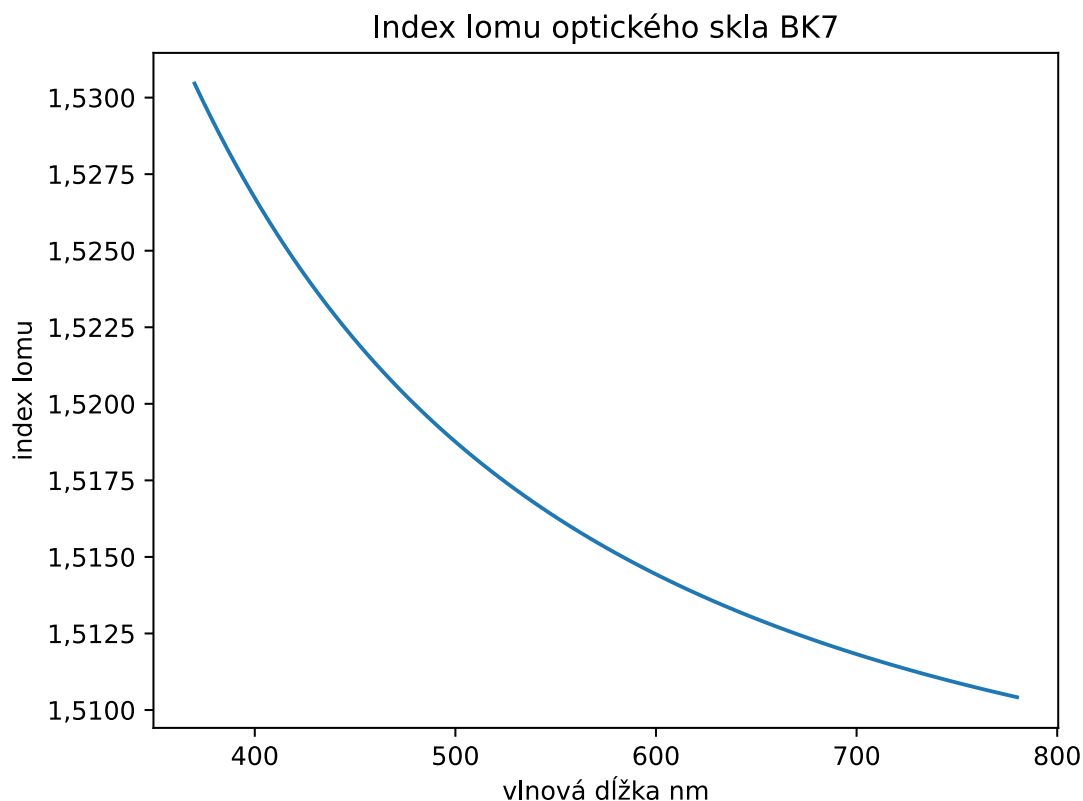
def Cauchy(w, a, b):
    return a + b/w**2

lambdaMin = 0.370
lambdaMax = 0.780
numPoints = 101
wl = np.linspace(lambdaMin, lambdaMax, numPoints)

A = 1.5046
B = 3.54e-3

plt.plot(1e3*wl, Cauchy(wl, A, B))

plt.xlabel("vlnová dĺžka nm")
plt.ylabel("index lomu")
plt.title("Index lomu optického skla BK7")
plt.show()
```



Meranie Cauchyho parametrov (flintové sklo SF10)

Povedzme, že sme meraním indexu lomu ďalšieho dôležitého typu skla, tzv. flintového skla SF10 v laboratóriu získali nasledujúcu tabuľku:

vlnová dĺžka nm	index lomu
410,175	1,7730
434,047	1,7626
486,134	1,7464
546,073	1,7343
589,592	1,7280
656,281	1,7209

Toto sklo sa vyrába pridaním prímеси olova do čistého skla. Dosahuje sa tak väčší index lomu, až 1,8. Takéto sklo máva tiež väčšiu disperziu. Kombináciou korunového skla (BK7) a flintového skla (SF10) sa eliminujú sférické a chromatické aberácie optických sústav.

Cauchyho parametre nájdeme aproximáciou (*fitovaním*) experimentálnych dát matematickým modelom metódou najmenších štvorcov. Použijeme na to metódu `curve_fit()` z triedy `scipy.optimize`:

```
import numpy as np
import pandas as pd
```

```

from scipy.optimize import curve_fit
import matplotlib.pyplot as plt

# Nastavenie desatinnej čiarky v grafe namiesto bodky
import locale
locale.setlocale(locale.LC_ALL, "sk_SK")
plt.rcParams["axes.formatter.use_locale"] = True

def Cauchy(w, a, b, c):
    return a + b/w**2 + c/w**4

nMeas = np.array([[0.410175, 1.7730],
                  [0.434047, 1.7626],
                  [0.486134, 1.7464],
                  [0.546073, 1.7343],
                  [0.589592, 1.7280],
                  [0.656281, 1.7209]])

nMeasF = pd.DataFrame(nMeas, columns=["wl", "n"])

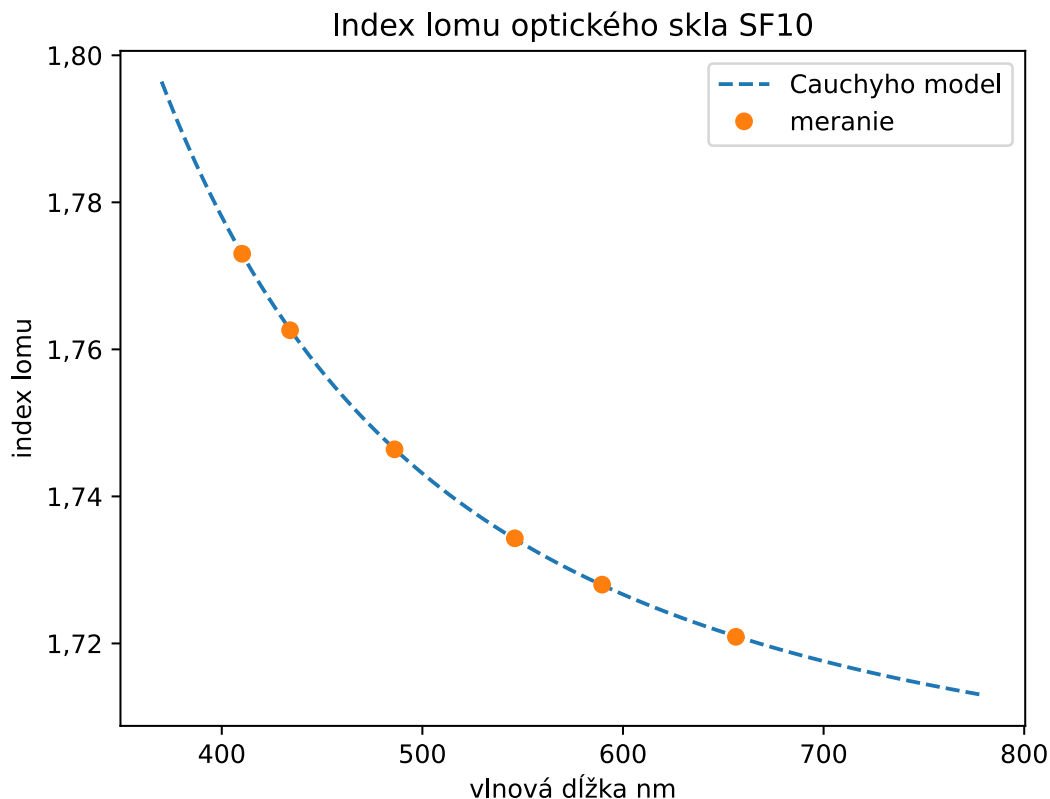
fitPar, fitCov = curve_fit(Cauchy, nMeasF.wl, nMeasF.n)

lambdaMin = 0.370
lambdaMax = 0.780
numPoints = 101
wl = np.linspace(lambdaMin, lambdaMax, numPoints)

plt.plot(1e3*wl, Cauchy(wl, *fitPar), "--", label="Cauchyho model")
plt.plot(1e3*nMeasF.wl, nMeasF.n, "o", label="meranie")

plt.xlabel("vlnová dĺžka nm")
plt.ylabel("index lomu")
plt.title("Index lomu optického skla SF10")
plt.legend()
plt.show()

```



V programe sme namerané údaje zadali ručne do dvojstĺpcovej matice `np.array()`. Vlnové dĺžky v mikrometroch sú číselne bližšie k jednotke, než v nanometroch, čo je v numerických výpočtoch výhodné. Potom sme maticu previedli na tabuľku údajov triedy `pandas` metódou `pd.DataFrame()`. Tento krok nie je nevyhnutný, umožňuje však prehľadnejšiu manipuláciu s dátami. Samotnú matematickú aproximáciu vykoná spomínaná funkcia `curve_fit()`. Vstupuje do nej názov funkcie, ktorej parametre hľadáme, x-ové a y-ové hodnoty. Na výstupe získame pole parametrov `fitPar` a kovariančnú maticu `fitCov`, z ktorej môžeme odhadnúť neistoty získaných parametrov.

Na začiatku kódu sme definovali funkciu `Cauchy()`, ktorú postupne volá metóda `curve_fit()` a optimalizuje jej parametre. Tentokrát sme použili Cauchyho model s tromi členmi, teda

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

Dvojčlenný model neaproximuje dáta flintového skla SF10 dostatočne.

🔗 Úloha

Môžete program modifikovať tak, aby pracoval iba s dvomi parametrami A a B . Výsledky potom porovnajte.

Výsledné hodnoty aproximácie sú uložené v premenných `fitPar` a `fitCov`. Funkcia `print()` umožňuje formátovaný výstup v termináli:

```
print("A = %5.7f +/- %1.1e\nB = (%1.5e +/- %1.1e) um^2\nC = (%1.5e +/- %1.1e)\n" % (fitPar[0], fitCov[0,0], fitPar[1], fitCov[1,1], fitPar[2],
```

```
fitCov[2,2]))
```

```
A = 1.6957648 +/- 3.3e-07  
B = (9.49756e-03 +/- 8.9e-08) um^2  
C = (5.86310e-04 +/- 1.3e-09) um^4
```

Použitý spôsob formátovania textového výstupu alebo vstupu pochádza z programovacieho jazyka c.

Ďalší dôležitý parameter pri aproximácii býva *suma štvorcov rezíduí* označovaná ako χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N [n(\lambda_i) - n_m(\lambda_i)]^2$$

kde n je index lomu vypočítaný pomocou Cauchyho vzťahu, n_m sú odmerané hodnoty indexu lomu, λ_i sú vlnové dĺžky z tabuľky odmeraných dát a N je počet odmeraných bodov. Pri aproximačnej metóde najmenších štvorcov je χ^2 veličina, ktorú `curve_fit()` minimalizuje v jednotlivých iteráciách výpočtu vhodnou zmenou parametrov modelu, ktoré sú v našom prípade veličiny Cauchyho parametre A , B a C . Veľkosť χ^2 predstavuje mieru toho, že hodnoty získané v experimente ležia na aproximačnej krivke. Zobrazíme ju v termináli nasledujúcim spôsobom:

```
print("Chi2 = %1.3e" % sum((Cauchy(nMeasF.wl, *fitPar) - nMeasF.n)**2))
```

```
Chi2 = 3.485e-08
```

Poznámka

V programe sme pri kreslení grafov použili modifikátor hviezdička pred meno premennej `fitPar`. Funkcia `Cauchy()` očakáva podľa definície na vstupe štyri parametre: pole vlnových dĺžok, Cauchyho parametre A , B a C . Tie sú ale prvkami poľa `fitPar`. Hviezdička rozbalí pole na jednotlivé prvky a pošle ich do funkcie ako skalárne premenné. Zápis `Cauchy(wl, *fitPar)` je teda skratka zápisu `Cauchy(wl, fitPar[0], fitPar[1], fitPar[2])`.

Úlohy

1. Nájdite Cauchyho koeficienty reálnej časti indexu lomu tenkej vrstvy SiO_2 z databázy refractiveindex.info. Pripravte si vhodný csv súbor a načítajte ho do dátového rámca. Potom ho aproximujte Cauchyho modelom pomocou funkcie `curve_fit()`. V rozsahu viditeľného svetla postačí jednoduchší model s dvomi parametrami.

Abbého číslo

Ak index lomu klesá s vlnovou dĺžkou, hovoríme o *normálnej disperzii*. V opačnom prípade ide o tzv. *anomálnu disperziu*. Tu treba podotknúť, že neexistuje látka s konštantným indexom lomu. Materiál môže mať len silnejšiu alebo slabšiu disperziu. Disperzné vlastnosti optických skiel opisuje tzv. *Abbého číslo*

$$V_D = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

kde n_d , n_F a n_C sú tri indexy lomu skla z rôznych častí spektra vo viditeľnej oblasti. Písmená d, F, a C sú tzv. Fraunhoferove symboly. Zodpovedajú emisným čiaram bežných zdrojov, ktoré boli v minulosti k dispozícii v každom laboratóriu:

Fraunhoferov symbol	vlnová dĺžka v nm	prvok	farba
F	486,13	H	modrá
d	587,56	He	žltá
C	656,27	H	červená

Čím je Abbého číslo väčšie, tým má materiál menšiu disperziu.

? Úlohy

1. Napíšte program na výpočet Abbého čísla zo zadaných Cauchyho koeficientov.
2. Modifikujte skript tak, aby vedel určiť Abbého číslo z nameraných údajov v csv súbore. Použite pri tom funkciu `CubicSpline()`.