Skúška 3.7.2014

Teória bez odvodení. Všetky použité veličiny slovne popíšte. Každá otázka je za 4 body.

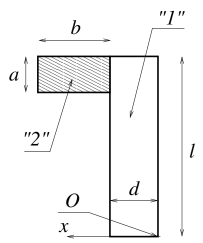
1. Ako je zavedené normálové a tangenciálne zrýchlenie bodu? Nakreslite trajektóriu bodu a na nej, pri jednej zvolenej okamžitej polohe bodu, vyznačte tieto dve zložky zrýchlenia ako nenulové vektory.
2. Zaveďte pojem okamžitého výkonu a napíšte jeho vyjadrenie pomocou pôsobiaceho vektora sily a vektora rýchlosti pôsobiska tejto sily. Uveďte príklad situácie keď je výkon nulový, hoci veľkosť pôsobiacej sily aj rýchlosť telesa, na ktoré táto sila pôsobí, budú nenulové.
3. Napíšte definíciu polohového vektora ťažiska telesa pomocou jeho rozdelenia na malé hmotné elementy s danými polohovými vektormi a hmotnosťami. Načrtnite príklad telesa, ktorého ťažisko sa nachádza mimo tohto telesa.
4. Pružina, na ktorú pôsobíme silou 10N, sa predĺži o 1cm. Aká je tuhosť tejto pružiny? Akú minimálnu prácu (v Jouloch) pri tom vykonáme?
5. Napíšte Bernoulliho rovnicu a nakreslite k nej ilustračný obrázok, ktorý ilustruje jej použitie pre riešenie ustáleného toku nestlačiteľnej kvapaliny.
6. Napíšte matematickú formuláciu 1. zákona termodynamického a uveďte, ktorá z v ňom použitých veličín je stavová a ktorá nie. Vysvetlite prečo je to tak na jednoduchom príklade.

Otázka s odvodením (8 bodov):

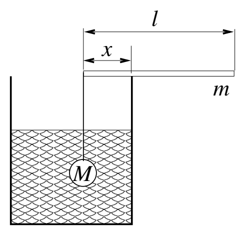
Odvoďte 1. pohybovú rovnicu pre pohyb ťažiska ideálne tuhého telesa (itt) z 2. Newtonovho zákona pre hmotné elementy itt.

Príklady:

1. (5b) Bod sa pohybuje v smere osi x tak, že závislosť jeho súradnice od času je daná predpisom $x(t) = c\left[(t-\tau)^3 + \tau^3\right]$, kde c a τ sú konštanty. (a) Nájdite vyjadrenie pre jeho rýchlosť ako funkciu času, (b) v akom čase bude jeho rýchlosť nulová a aká bude jeho poloha v tomto čase? (c) kde sa bude bod nachádzať v čase rovnom trojnásobku času z otázky b.?
2. (5b) Nájdite x-ovú súradnicu ťažiska telesa skladajúceho sa z pevne spojených dvoch hranolov s rozmermi zadanými na obrázku, pričom pomer hustoty časti 1 a 2 je $\rho_1/\rho_2 = \eta$. Počiatok súradníc si zvoľte bod $\mathcal{O}$ v pravom dolnom rohu telesa. Predpokladajte, že obe telesá majú rovnakú hrúbku v smere kolmom na rovinu papiera.



3. (6b) Tyč s dĺžkou l a hmotnosťou m je položená horizontálne na hrane nádoby s neznámou kvapalinou. Vzdialenosť miesta kontaktu nádoby a tyče od jej bližšieho konca je x. Na tomto konci tyče je na niti zavesená gulička s polomerom R a hmotnosťou M, ktorá je celá ponorená do kvapaliny. Aká je hustota neznámej kvapaliny ak poznáme všetky tu uvedené veličiny? (Hmotnosť nite zanedbajte)



4. (6b) Plyn vykonáva cyklický dej: z tlaku p_1 a objemu V_1 adiabaticky expanduje na tlak a objem p_2 a V_2, potom je izobaricky stlačený na pôvodný objem V_1 a nakoniec je izochoricky zohriaty na počiatočný tlak p_1. (a) Nakreslite tento dej do $p-V$ diagramu a označte počiatočné a koncové stavy pre jednotlivé elementárne deje. (b) Aké je látkové množstvo plynu ak teplota, ktorú nadobudne plyn na konci izobarického stláčania je T_3? (c) Akú celkovú prácu vykoná plyn pri jednom cykle? p_1, p_2, V_1, V_2 a T_3 považujte za známe veličiny. Univerzálnu plynovú konštantu R považujte za známu.

Pr 1

$$x(t) = c\left[(t-\tau)^3 + \tau^3\right]$$

a) $\dot{x}(t) = c\,3(t-\tau)^2$ $1\frac{1}{4}$b

b) $\dot{x}(t_1) = 0 = c\,3(t_1-\tau)^2 \Rightarrow t_1 = \tau$ $1\frac{1}{4}$ b

$x(t_1) = x(\tau) = c\tau^3$ $1\frac{1}{4}$ b

c) $x(3\tau) = c\left[(2\tau)^3 - \tau^3\right] = 7c\tau^3$ $1\frac{1}{4}$ b

Pr 2

$$X^* = \frac{x_1^* m_1 + x_2^* m_2}{m_1 + m_2}$$ 1b

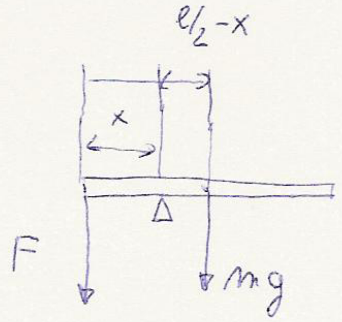
$x_1^* = \frac{d}{2}$ $m_1 = \rho_1\, d\, l\, h$ h - hrúbka 1b

$x_2^* = d + \frac{b}{2}$ $m_2 = a\, b\, \rho_2\, h$ 1b

$$X^* = \frac{\frac{d}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2} d\, l\, \cancel{h} + \left(d+\frac{b}{2}\right)\cancel{\rho_2}\, a\, b\, \cancel{h}}{\frac{\rho_1}{\rho_2} d\, l\, \cancel{h} + a\, b\, \cancel{\rho_2}\, \cancel{h}} = \frac{\frac{d\, d\, l}{2}\eta + \left(d+\frac{b}{2}\right)ab}{\eta\, d\, l + ab}$$

2b

Pr3



$$F_{vz} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_{kv}\, g$$

$$\overbrace{mg\left(\frac{\ell}{2}-x\right)}^{1b} = \overbrace{xF}^{1b}$$

$$F = \underbrace{Mg}_{1b} - \frac{4}{3}\underbrace{\pi R^3 \rho_{kv}\, g}_{1b}$$

$$mg\left(\frac{\ell}{2}-x\right) = x\left(Mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{kv}\, g\right)$$

$$m\left(\frac{\ell}{2x}-1\right) = M - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{kv}$$

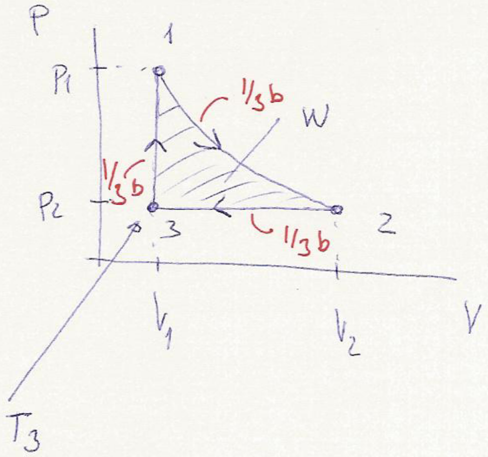
$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{kv} = M - m\left(\frac{\ell}{2x}-1\right)$$

$$\rho_{kv} = \frac{3}{4\pi R^3}\left(M - m\left(\frac{\ell}{2x}-1\right)\right)$$

2b

Pr 4

a)



b) $p_2 V_1 = n R T_3$ 1/2

$$n = \frac{p_2 V_1}{R T_3}$$ 1/2

c) $W = \overset{>0}{W_{12}} + \overset{<0}{W_{23}}$ .... 1/2 b

W_{12}: $\Delta W_{12} = \underbrace{-\int_1^2 p\,dV}_{W_{12}}$

$p_1 V_1 = n R T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}$

$p_2 V_2 = n R T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR}$

$$\Delta W_{12} = n C_v (T_2 - T_1) = \cancel{n} C_v \frac{1}{\cancel{n}R}\left(p_2 V_2 - p_1 V_1\right)$$

$$W_{12} = \frac{C_v}{R}\left(p_1 V_1 - p_2 V_2\right)$$ 1b

$$W_{23} = p_2 (V_1 - V_2)$$ 1b

$C_v = ?$

1.) $\frac{C_p}{C_v} = \varkappa \quad \frac{C_v + R}{C_v} = \varkappa \Rightarrow R = (\varkappa - 1) C_v$

$$C_v = \frac{R}{\varkappa - 1}$$ 1/2 b

2.) $p_1 V_1^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} \Rightarrow \ln \frac{p_1}{p_2} = \varkappa \ln \frac{V_1}{V_2}$

$$\varkappa = \frac{\ln p_1/p_2}{\ln V_1/V_2}$$ 1/2 b

$$W = \frac{1}{\varkappa - 1}\left(p_1 V_1 - p_2 V_2\right) + p_2 (V_1 - V_2),$$ ✓ 1b/2

kde $\varkappa = \frac{\ln p_1/p_2}{\ln V_1/V_2}$