Poznámky k pružnosti a vlnám v rámci prednášok z Fyziky 1.

Peter Bokes, leto 2010

22/4/2010

1 Vlnenie hmotného prostredia

Idealizácia, používaná pre popis dynamiky tuhého telesa, bola založená na priblížení, že tuhé teleso môžeme dostatočne dobre popisovať ako ideálne tuhé teleso, t.j. také, ktoré nemení svoje geometrické rozmery a tvar. V nasledujúcej prednáške si ukážeme ako možno uvážiť deformácie tuhých telies pokiaľ sú tieto dostatočne malé, t.j. kým je deformácia telies pružná, nazývaná aj elastická. Kým 1. veta o pohybe ťažiska ostáva platná aj pre deformovateľné telesá, o čom sa dá presvedčiť analýzou jej odvodenia, teleso samotné už nie je popísateľné len šiestimi geometrickými stupňami voľnosti, ale počet stupňov voľnosti sa stáva nekonečne veľký. Matematicky možno takúto úlohu zadefinovať pomocou zavedenia tzv. *poľa výchyliek hmotných elementov telesa* a skonštruovaním tzv. *parciálnej diferenciálnej rovnice* pre toto pole. Úloha tejto rovnice je podobná ako úloha Newtonovho zákona pre hmotný bod - udáva časový vývoj všetkých vnútorných (teda iných ako je poloha celkového ťažiska študovaného telesa) stupňov voľnosti pružného telesa. Preto takúto parciálnu diferenciálnu rovnicu tiež nazývame *pohybovou rovnicou* pružného telesa. Oboznámime sa s charakterom riešení vlnovej rovnice všeobecne ako aj v špeciálnom no veľmi dôležitom prípade tzv. harmonickej vlny. Toto zodpovedá šíreniu sa harmonických kmitov s vybranou frekvenciou v priestore. Tému vlnenia uzatvoríme aplikačne zaujímavým javom - Dopplerovým efektom.

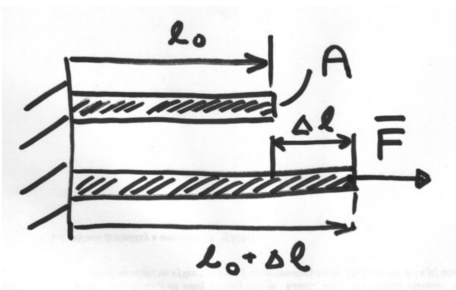
1.1 Pružnosť tuhých látok

Uvažujme tyč pevne uchytenú na jednom konci. Na jej druhý koniec nech pôsobí sila $\vec{F}$, pôsobiaca tak, aby sa tyč natiahla (Obr.1). Ak mala tyč pred tým, ako začala sila pôsobiť, prierez $A_0 = a_0^2$, kde a_0 je jej priečny rozmer, a dĺžku l_0, potom v dôsledku pôsobenia tejto sily očakávame, že sa tyč natiahne o dĺžku Δl a jej priečny rozmer sa zmenší o Δa.

Pre popis deformácie sa zavádzajú nasledovné veličiny:

1. Relatívne predĺženie ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{1}$$



Obrázok 1: Hook

ktoré je evidentne bezrozmerné číslo.

2. Relatívne skrátenie η

$$\eta = -\frac{\Delta a}{a_0}, \tag{2}$$

čo je podobne ako relatívne predĺženie bezrozmerné číslo.

3. (mechanické) Napätie σ

$$\sigma = \frac{F}{A}, \tag{3}$$

kde F je sila pôsobiaca kolmo na plochu A a orientovaná von z materiálu, na ktorý sila pôsobí (ťahom). Jednotky napätia sú $\sigma =$ N m^{-2} =Pa (Pascal).

Ukazuje sa, že pre malé hodnoty relatívneho predĺženia, t.j. $\varepsilon << 1$, je závislosť medzi predĺžením a pôsobiacim napätím lineárna,

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{4}$$

kde E sa nazýva Youngov modul pružnosti v ťahu, konštanta špecifická pre vybraný materiál. Niektoré hodnoty Youngovho modulu pružnosti sú v tabuľke 1. Je dôležité si uvedomiť, že hoci do definičného vzťahu pre Youngov modul pružnosti vstupuje len sila $\vec{F}$, z dôvodu uchytenia druhého konca pôsobí na tyč v mieste uchytenia identická, no opačne orientovaná sila $-\vec{F}$. Výslednica síl pôsobiacich na tyč musí byť nulová, pretože aj v jej natiahnutom stave je jej ťažisko v pokoji.

materiál	E [GPa]	ρ [kg m^{-3}]
oceľ	220	7700
guma	0.1-0.01	??
drevo	10	??
diamant	1200	??
CNT	1000+	N/A

Tabuľka 1: Tabuľka modulu pružnosti a hustôt pre niekoľko vybraných materiálov (Zdroj Wikipedia)

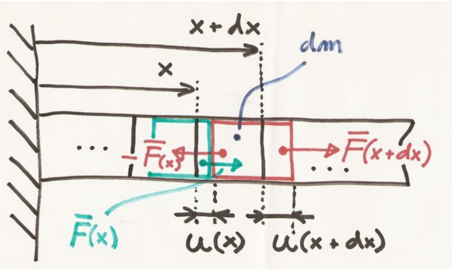
Len pre úplnosť spomenieme, že relatívne skrátenie sa ukazuje byť v rámci platnosti Hookovho zákona úmerné relatívnemu predĺženiu,

$$\eta = \nu\varepsilon, \tag{5}$$

kde ν sa nazýva Poissonov pomer a typicky nadobúda hodnoty okolo 0.3-0.5. Okrem týchto dvoch materiálových parametrov existujú aj ďalšie, a to najmä pre anizotropné látky, ale týmito špecifickými problémami sa tu ďalej zaoberať nebudeme, nakoľko pre naše účely oboznámenia sa s prístupom k popisu pružných tuhých látok nám bude postačovať Youngov modul pružnosti v ťahu.

1.2 Odvodenie vlnovej rovnice pre pružnú tyč

Pohyb pružnej tyče budeme charakterizovať poľom výchyliek hmotných elementov $u(x,t)$ oproti ich polohám v kľude v miestach $0, dx, 2dx, ..., x, x+dx, ...l_0 - dx$. Každý hmotný element bude mať dĺžku dx, prierez zhodný s prierezom tyče A_0 a hmotnosť $dm = Adx\rho$, kde ρ je rovnovážna hustota materiálu tyče, t.j. hustota zodpovedajúca nezdeformovanej tyči.



Obrázok 2: Hmotný element hmotnej tyči s hmotnosťou dm, ktorý sa v pokojovom stave tyče nachádza medzi súradnicami x a $x+dx$ je v dôsledku deformácie tyče deformovaný tak (červený obdĺžnik), že jeho začiatok, pôvodne na x sa vychýli o $u(x)$ a jeho koniec o $u(x+dx)$. Táto deformácia je spôsobená silovým pôsobením od susedných elementov prostredníctvom síl $F(x+dx)$ na jeho koniec a $-F(x)$ na jeho začiatok.

V rámci popisu sa stretneme s deriváciami poľa výchyliek podľa času pre vybraný element, t.j. fixované x, alebo s deriváciami poľa výchyliek podľa x pre fixovaný čas t. Takéto derivácie sa označujú ako

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \text{ alebo } \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{6}$$

a nazývajú sa *parciálnymi deriváciami*. Ich praktické používanie je identické s normálnym derivovaním s uvážením, že ostatné premenné derivovanej funkcie berieme ako konštanty.

2. Newtonov zákon pre hmotný element tyče nachádzajúci sa pred deformáciou medzi x a $x+dx$ potom nadobudne tvar

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = dF(x), \tag{7}$$

kde $dm = \rho A_0 dx$ je hmotnosť takéhoto elementu, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ je jeho zrýchlenie a $dF(x)$ je celková sila od susedných elementov, ktorá naň pôsobí. Na základe obrázku (2) nájdeme pre túto silu v smere posunutia elementu

$$dF(x) = F(x+dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x}dx, \tag{8}$$

kde sme použili Taylorov rozvoj $F(x+dx) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \ldots$ nakoľko dx je veľmi malé. Samotnú veľkosť sily $F(x)$, ktorou pôsobí element nachádzajúci sa medzi $x-dx$ a x na náš študovaný element (medzi x a $x+dx$) môžeme získať pomocou Hookovho zákona

$$F(x) = A_0\sigma(x) = A_0 E\varepsilon(x) = A_0 E\frac{u(x+dx,t)-u(x,t)}{dx} = A_0 E\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

(opäť Taylorov rozvoj pre $u(x+dx)$). Dosadením výsledkov (9) do (8) a následne do (7) dostávame výslednú rovnicu pre pole výchyliek,

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{10}$$

ktorú voláme aj *vlnová rovnica*, pretože jej riešením sú vlny, ako sa presvedčíme v nasledujúcom.

Podobne ako pri pohybovej rovnici harmonického oscilátora, aj tu ideme hľadať riešenie, t.j. takú funkciu $u(x,t)$, ktorá vyhovuje vlnovej rovnici. Ukážeme si, že trieda funkcií, ktoré vlnovú rovnicu spĺňajú, je značne veľká, pričom všetky majú tvar

$$u(x,t) = f(x \pm vt), \tag{11}$$

kde $f()$ je ľubovoľná funkcia jednej premennej a v je parameter, ktorého rozmer musí byť m s^{-1}, t.j. rýchlosť. Vyčíslením druhých derivácií z (11) dostávame

$$\frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial x^2} = f''(x \pm vt) \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial t^2} = v^2 f''(x \pm vt), \tag{13}$$

kde $f''()$ je druhá derivácia funkcie $f()$ podľa jej argumentu. Dosadením týchto výsledkov do rovnice (10) a vidíme, že predpis (11) spĺňa vlnovú rovnicu, ak parameter v je daný ako

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{14}$$

Riešenie v tvare (11) má jasnú fyzikálnu interpretáciu: graf funkcie výchyliek v čase $t = 0$ vytvára obrazec, ktorý sa pre $t > 0$ posúva doprava (doľava) pre kladné (záporné) znamienko pred parametrom v, pričom za čas t sa posunie o vzdialenosť $\pm vt$. Inými slovami, v vo vzťahu (**??**) zodpovedá *rýchlosti šírenia pružnej deformácii v tyči.*

Ak do vzťahu pre rýchlosť šírenia dosadíme konkrétne hodnoty modulu pružnosti a hustoty pre vybraný materiál, napr. pre oceľ (Tabuľka 1), dostaneme $v \approx 5000$m s^{-1}, čo je skutočne hodnota rýchlosti šírenia zvuku v oceli. Znamená to, že šírenie zvuku v tuhých látkach prebieha prostredníctvom šírenia sa mechanických deformácii pružného tuhého telesa.

Vlnová rovnica, podobne ako rovnica pre harmonický oscilátor, má matematický tvar, ktorý nachádzame aj v iných problémoch. Šírenie priečnych výchyliek struny, $y(x,t)$, ktorá je napínaná silou T a má dĺžkovú hustotu $s = M/L$ je popísané rovnicou[1]

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{s} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \tag{15}$$

a teda rýchlosť šírenia deformácií struny je $v = \sqrt{T/s}$. Šírenie zvukových vĺn v plynoch, a teda aj vo vzduchu, je popísaný trojrozmerným zovšeobecnením vlnovej rovnice

$$\frac{\partial^2 \rho(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho(x,y,z,t), \tag{16}$$

kde $\rho(x,y,z,t)$ je hustota plynu v mieste $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ a čase t a $\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}$ je derivácia rovnovážneho tlaku plynu podľa rovnovážnej hustoty (pri konštantnej entropii, o čom sa dozvieme v termodynamike), t.j. zmena tlaku pri zmene hustoty v prípade, že plyn je v kľude, bez zvukových vĺn. Pre rýchlosť šírenia zvukových vĺn v plynoch teda dostávame $v = \sqrt{\partial p_0 / \partial \rho_0}$. Šírenie elektromagnetických vĺn je podobne popísané vlnovou rovnicou pre elektrické aj magnetické pole, s čím sa oboznámite v predmete Fyzika 2, ale aj na prednáškach z Teoretickej elektrotechniky.

1.3 Harmonická vlna

Hoci riešením vlnovej rovnice môže byť akákoľvek funkcia v tvare (11), existuje podskupina riešení, tzv. *harmonické vlny*, ktoré majú mimoriadny význam, ako vysvetlím v nasledovnom.

[1] Jej jednoduché odvodenie možno nájsť napríklad v učebnici J. Krempaský:Fyzika, str. XXX.

Predstavme si, že vzruchy v pružnej tyči generujeme reproduktorom, ktorého membrána udiera v istom mieste na prierez tyče. Najjednoduchší pohyb membrány bude harmonické kmitanie, s akým sme sa oboznámili v časti o harmonickom oscilátore, a toto bude vynucovať časovú závislosť výchylky v mieste membrány $x = x_0$ v tvare

$$u(x_0,t) = u_0 \cos(\omega t), \tag{17}$$

kde ω je frekvencia budená reproduktorom. Vzhľadom na to, že riešenie v tyči musí mať tvar (11), je zrejmé, že aby toto bolo konzistentné s tvarom výchylky v mieste $x = x_0$ musí takto budená vlna mať tvar

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega(t \pm (x-x_0)/v) = u_0 \cos(\omega t \pm kx - \phi), \tag{18}$$

kde sme zaviedli označenie pre $k = \omega/v$ a konštantný (t.j. od x a t nezávislý) fázový posun $\phi = \pm x_0 \omega/v$.

Riešenie vlnovej rovnice typu (18) nazývame harmonickou vlnou s frekvenciou ω a *vlnovým číslom* k. Ak budeme nahliadať na harmonickú vlnu vo vybranom mieste x ako na funkciu času, nájdeme, že po uplynutí času $T = 2\pi/\omega$ (ktorý nazývame periódou vlny, podobne ako pri kmitoch), nadobudne výchylka tú istú hodnotu, pretože

$$\omega(t+T) \pm kx - \phi = \omega t \pm kx - \phi + \omega\frac{2\pi}{\omega}, \tag{19}$$

a teda celková fáza sa zmení o 2π. Podobne sa možno pozrieť na priestorovú závislosť harmonickej vlny pre *fixovaný okamžik času t*; budeme hľadať, o akú vzdialenosť λ sa musíme posunúť, aby sme zmenili fázu o 2π, a teda aby amplitúda vlny nadobudla tú istú výchylku

$$\omega t \pm k(x+\lambda) - \phi = \omega t \pm kx - \phi \pm k\lambda, \tag{20}$$

a teda musí platiť $k\lambda = 2\pi$. Teda pri posunutí sa o $\lambda = 2\pi/k$ nadobudne amplitúda tú istú hodnotu. Veličinu λ nazývame *vlnová dĺžka* harmonickej vlny.

Nakoľko vlnové číslo je dané frekvenciou a rýchlosťou, dostávame pre vlnovú dĺžku často používané vzťahy

$$\lambda = 2\pi v/\omega = v/f = vT, \tag{21}$$

kde v je rýchlosť šírenia vlny, f je jej frekvencia a T perióda. Posledné dva si ľahko zapamätáme aj pomocou rozmerovej analýzy, pretože vlnová dĺžka ma rozmer vzdialenosti a perióda má rozmer času.

1.4 Skladanie harmonických vĺn a kmitov

1.4.1 Prijímanie vĺn

Podobne ako sme "motivovali"?? tvar harmonickej vlny jej generovaním pomocou reproduktoru, môžeme porozumieť aj jej prijímaniu pomocou zariadenia podobného mikrofónu, resp. reproduktoru pracujúcemu naopak. Ak tyčou prechádza vlna

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx), \tag{22}$$

tak v mieste mikrofónu $x = x_1$ budeme merať signál

$$x(t) = u(x_1,t) = B(\omega) u_0 \cos(\omega t - \phi_1), \quad \phi_1 = kx_1, \tag{23}$$

kde sme zámerne uviedli fázu kmitov samostatne. Prirodzene, hodnota tejto fázy závisí od polohy mikrofónu. Amplitúda, s ktorou bude mikrofón rozkmitaný, bude úmerná súčinu amplitúdy vlnenia u_0 s rezonančnou charakteristikou mikrofónu $B(\omega)$ s maximom v okolí vlastnej frekvencie mikrofónu ω_0. V prípade, že faktor kvality mikrofónu je malý, získame mikrofón, ktorý dokáže zachytiť rôzne frekvencie s približne rovnakou amplitúdou $B(\omega)$, pretože rezonančné maximum je široké a ploché. Takéto (širokospektrálne) mikrofóny sú potrebné pre zachytenie tónov z rôznymi frekvenciami. V prípade, že faktor kvality mikrofónu je veľký, získame "mikrofón", ktorý selektívne detekuje len istú špecifickú frekvenciu, ktorý by sme mali nazývať skôr detektor ako mikrofón.

Predstavme si, že niekde v tyči sú dva reproduktory, pričom každý generuje vlnu s inou frekvenciou, a teda aj s iným vlnovým číslom a inou vlnovou dĺžkou. Z dôvodu linearity vlnovej rovnice, t.j. vlastnosti rovnice, že súčet dvoch riešení je tiež riešením rovnice, sa bude tyčou šíriť vlna skladajúca sa z dvoch harmonických vĺn, z ktorých každá je generovaná iným reproduktorom (vezmime ten prípad, keď sa vlnenie šíri doprava, t.j. v kladnom smere osi x.),

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \tag{24}$$

$$u_1(x,t) = u_{1,0}\cos(\omega_1 t - k_1 x) \tag{25}$$

$$u_2(x,t) = u_{2,0}\cos(\omega_2 t - k_2 x - \phi_2). \tag{26}$$

Hovoríme, že výsledná vlna vzniká *superpozíciou* dvoch harmonických vĺn. Prirodzene, takúto konštrukciu môžeme rozšíriť ďalej, a hovoriť o vlnení, ktoré vznikne superpozíciou viacerých harmonických vĺn. Naopak, vyjadrenie všeobecného vlnenia pomocou superpozície harmonických vĺn nazývame *harmonickou analýzou* a matematicky ho možno previesť pomocou Fourierových radov alebo integrálov. Nakoľko táto časť matematiky vám ešte nie je známa, budeme sa tu zaoberať len jednoduchými prípadmi skladania dvoch harmonických vĺn, na ktorých sa ale oboznámime s javmi všeobecného charakteru týkajúcich sa harmonickej analýzy.

1.4.2 Modulácia amplitúdy kmitov a rázy

V prvom rade sa budeme zaoberať otázkou, aké výsledné kmity bude detekovať mikrofón umiestnený niekde v mieste x_1, ktorý má selektívnu rezonančnú charakteristiku $B(\omega)$ s maximom pre $\omega = \omega_0$. Pre jednoduchosť predpokladajme, že v mieste x_1 nám bude platiť že $u_{1,0} = u_{2,0} = u_0$, $k_1 x_1 = m2\pi$ a $k_2 x_1 + \phi_2 = n2\pi$, kde m a n sú celé čísla, a teda v mieste mikrofónu výchylky tyče majú tvar

$$u(x_1,t) = u_0(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \tag{27}$$

V prípade, že dve frekvencie ω_1 a ω_2 sa budú líšiť o viac ako je šírka maxima rezonančnej charakteristiky mikrofónu, bude môcť mikrofón zachytiť buď jeden alebo druhý signál (alebo žiaden), podľa toho, ktorého frekvencia je blízka rezonančnej frekvencii mikrofónu ω_0.

Na druhej strane, ak položíme

$$\omega_1 = \omega + \delta\omega, \tag{28}$$

$$\omega_2 = \omega - \delta\omega, \tag{29}$$

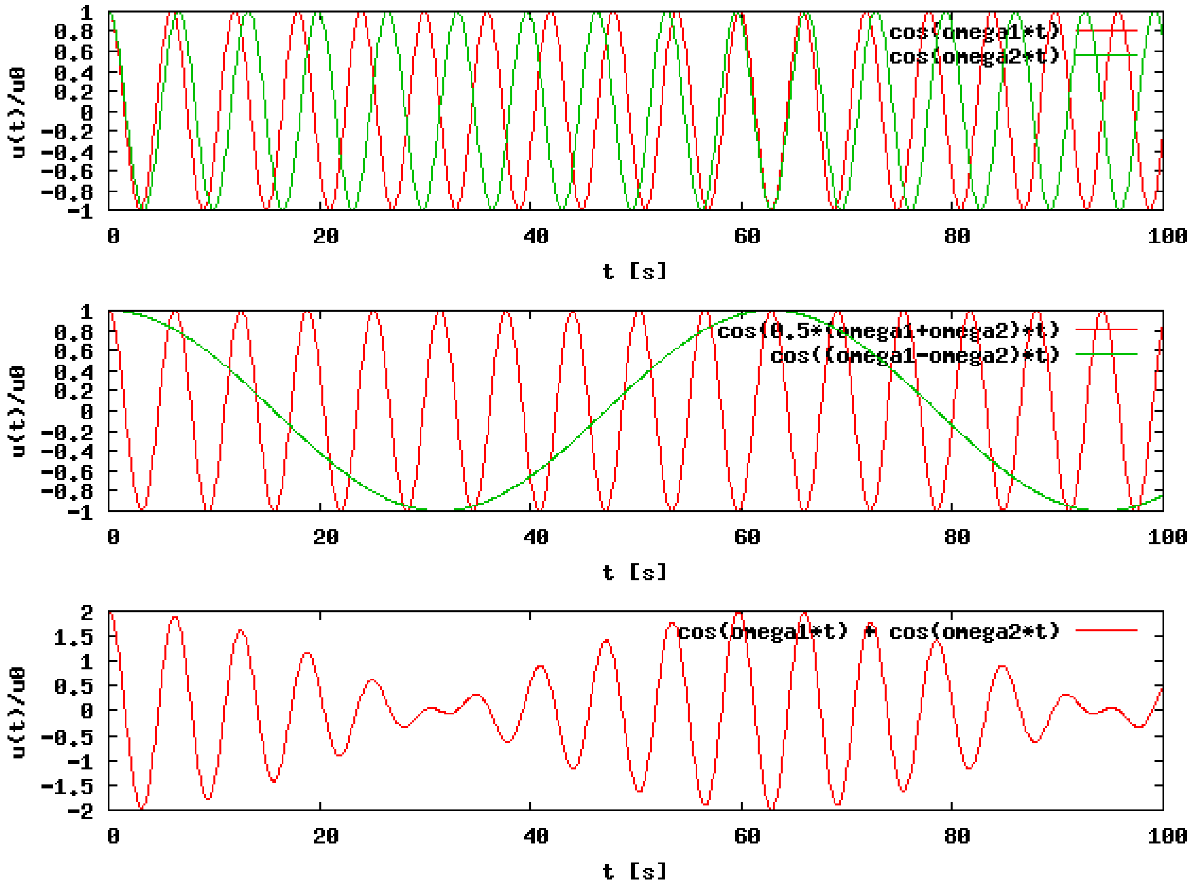
pričom ω_1 aj ω_2 sú v blízkosti ω_0, potom $B(\omega_1) \approx B(\omega_2) \approx B(\omega_0)$ a prijímaný signál má tvar[2]

$$u(x_1,t) = u_0 B(\omega_0)(\cos((\omega+\delta\omega)t) + \cos((\omega-\delta\omega)t)) = 2u_0 B(\omega_0)\cos(\omega t)\cos(\delta\omega t), \tag{30}$$

$$\approx 2u_0 B(\omega_0)\cos(\delta\omega t)\cos(\omega_0 t), \tag{31}$$

t.j. mikrofón bude snímať výsledný signál ako kmitanie s frekvenciou ω_0, no amplitúda tohto signálu bude modulovaná s frekvenciou $\delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ (Viď obrázok (3)). Tento jav je známy všetkým, ktorí

[2]Použijeme súčtový vzťah $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.



Obrázok 3: Ilustrácia skladania signálov z blízkymi frekvenciami. *Vrchný graf:* dva signály s blízkymi frekvenciami ω_1 a ω_2, *Stredný graf:* signál so strednou frekvenciou $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ (červený) a signál modulácie jeho amplitúdy s frekvenciou $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, *Dolný graf:* zložený signál.

niekedy ladili strunový hudobný nástroj, napríklad gitaru. Akonáhle sú frekvencie dvoch strún dostatočne blízko, nepočujeme ich ako dva rôzne tóny, ale ako jeden tón s pomaly sa meniacou amplitúdou - tzv. rázy. Čím je rýchlosť menenia sa tejto amplitúdy menšia, tým sú frekvencie dvoch porovnávaných strún bližšie sebe, ako nám aj indikuje nami nájdený vzťah pre frekvenciu rázov $\delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$.

Videli sme, že skladaním dvoch harmonických signálov dostaneme jeden približne harmonický signál s modulovanou amplitúdou, pričom čas medzi dvoma nasledovnými rázmi je $T = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$. V rámci Fourierovej analýzy sa dá ukázať, že superpozíciou mnohých harmonických signálov s frekvenciami z intervalu $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ získame signál, ktorý má dominantne charakter harmonickej vlny s frekvenciou $\omega_0 \approx (\omega_1 + \omega_2)/2$, no jeho amplitúda je namodulovaná tak, že táto je nenulová len počas časového intervalu $\delta t = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$.

1.4.3 Vlnový balík a grupová rýchlosť.

Úplne analogicky môžeme hovoriť o skladaní alebo superpozícii celých harmonických vĺn z hľadiska ich tvaru v priestore a čase. Uvažujme vyššie spomenutú situáciu s vlnením, ktoré vzniklo superpozíciou dvoch harmonických vĺn, a pre jednoduchosť predpokladajme že $u_{1,0} = u_{2,0} = u_0$ a $\phi_2 = 0$. Potom tvar výslednej vlny možno prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0\left(\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)\right) && (32)\\ &= 2u_0 \cos(\omega t - kx)\cos(\delta\omega t - \delta k x), && (33)\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_2 + \omega_1)/2, \quad \delta\omega = \omega_2 - \omega_1, && (34)\\ k &= (k_2 + k_1)/2, \quad \delta k = k_2 - k_1. && (35)\end{aligned}$$

Podobne ako v prípade rázov, aj tu vidíme, že superpozícia vĺn s blízkymi frekvenciami a vlnovými číslami vytvára približne harmonickú vlnu s frekvenciou ω a vlnovým číslom k, ktorej amplitúda je modulovaná "obálkou" $\cos(\delta\omega t - \delta k x)$. Maximum tejto modulácie je v mieste x_M v čase t_M daným

$$\delta\omega t_M - \delta k x_M = 0, \tag{36}$$

t.j. miesto maxima modulácie sa mení s časom podľa predpisu

$$x_M = \frac{\delta\omega}{\delta k} t_M = v_g t_M, \tag{37}$$

kde

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk} \tag{38}$$

nazývame grupovou rýchlosťou vlnenia.

Ak by sme uvažovali súčet nielen dvoch, ale mnohých harmonických vĺn z intervalu (ω_1, ω_2) tak podobne ako v predchádzajúcej diskusii o kmitoch v mikrofóne, získali by sme vlnu, ktorá má v danom čase amplitúdu nenulovú len v obmedzenej oblasti tyče s dĺžkou $\delta x = 2\pi/\delta k$, pričom maximum tejto modulácie v priestore sa pohybuje grupovou rýchlosťou

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v. \tag{39}$$

kde v je rýchlosť šírenia zvuku, ktorú sme zaviedli pri odvodení vlnovej rovnice.

Ako sme videli, v prípade deformačných akustických vĺn platí, že

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k}, \tag{40}$$

kde

$$v_f = \frac{\omega}{k} \tag{41}$$

sa nazýva fázová rýchlosť, nakoľko táto zodpovedá rýchlosti pohybu fázy jednej harmonickej vlny. Rovnosť fázovej a grupovej rýchlosti však neplatí pre všetky situácie, kde sa s vlnením stretávame. Napríklad elektromagnetické vlny šíriace sa prostredím, v ktorom rezonančná frekvencia kmitov elektrónov v atómoch prostredia je blízka frekvencii vlny, majú nelineárnu závislosť frekvencie od vlnového čísla a grupová rýchlosť je odlišná od fázovej rýchlosti. Nakoľko grupová rýchlosť zodpovedá pohybu maxima lokalizovanej vlny, je práve ona mierou prenosu energie alebo informácie.

Prakticky každý vysielaný signál nie je čistá harmonická vlna, ale balík, pretože čistá harmonická vlna sa rozprestiera od $x = -\infty$ do $x = +\infty$, čo reálne signály nespĺňajú. Namiesto toho používame vlnové balíky, ktoré sa skladajú z veľmi úzkeho intervalu frekvencií $\delta\omega$, takže mnohé vlastnosti a výpočty môžeme prevádzať akoby to boli čisté harmonické vlny s frekvenciou ω a vlnovým číslom k. Jedným z mála rozdielnych výsledkov je, že kým pohyb obrazca čistej harmonickej vlny je charakterizovaný fázovou rýchlosťou, balík sa bude šíriť priestorom grupovou rýchlosťou.

1.5 Dopplerov jav

Uvažujme vlnu šíriacu sa v smere osi x s frekvenciou ω a rýchlosťou v ,

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx), \tag{42}$$

pričom, ako vieme, platí $k = \omega/v$.

Nech mikrofón, resp. pozorovateľ sa pohybuje konštantnou rýchlosťou u_P, t.j. jeho poloha závisí od času vzťahom

$$x_P = x_{0P} + u_P t \tag{43}$$

Potom signál prijímaný pozorovateľom bude mať časový priebeh

$$u_P(t) = u_0 \cos(\omega t - k(x_{0P} + u_P t)) = u_0 \cos\left((\omega - k u_P)t - k x_{0P}\right) \tag{44}$$

Kým člen $-kx_{0P}$ predstavuje len konštantný fázový posun, faktor pri čase má evidentne zmysel frekvencie, ktorú prijíma pozorovateľ, t.j.

$$\omega_P = \omega - k u_P = \omega(1 - \frac{u_P}{v}). \tag{45}$$

Pozorovateľ teda bude registrovať nižšiu frekvenciu, ak sa pohybuje v smere šírenie vlnenia a vyššiu frekvenciu, ak sa pohybuje proti nemu.

Uvažujme teraz prípad, keď sa zdroj pohybuje v smere šírenia vlny rýchlosťou u_Z, potom v mieste zdroja bude generujúci signál

$$u_Z(t) = u_0 \cos(\omega_Z t - \phi_Z), \tag{46}$$

ktorý musí byť identický s vlnením v mieste $x_Z = x_{Z0} + u_Z t$,

$$u(t, x = x_Z(t)) = u_0 \cos(\omega t - k(x_{Z0} + u_Z t)) = u_0 \cos\left((\omega - k u_z)t - k x_{Z0}\right) \tag{47}$$

a teda evidentne frekvencia šíriaceho sa signálu súvisí s frekvenciou generovaného signálu vzťahom

$$\omega_Z = \omega - k u_Z = \omega(1 - \frac{u_Z}{v}) \tag{48}$$

alebo

$$\omega = \frac{\omega_Z}{1 - \frac{u_Z}{v}}. \tag{49}$$

Ak skombinujeme oba získané výsledky, dostaneme vzťah pre frekvenciu, ktorú prijíma prijímateľ pohybujúci sa rýchlosťou v_P vzhľadom na prostredie, ak sa zdroj pohybuje rýchlosťou v_Z vzhľadom na toto isté prostredie,

$$\omega_P = \frac{1 - u_P/v}{1 - u_Z/v}\omega_Z. \tag{50}$$

Takýto zdanlivý posuv vo frekvencii sa nazýva Dopplerov vzťah a má široké aplikačné použitie, napr. v Mössbauerovej spektroskopii alebo v meraní rýchlosti.

1.6 Energetická bilancia pri šírení vĺn

Podobne ako sme našli zákon pre zachovávanie energie pre hmotný bod či ideálne tuhé teleso, možno nájsť vzťah pre energetickú bilanciu pre vlnové procesy. Bude tu však jeden dôležitý rozdiel - hoci sa materiál hmoty nehýbe - samotná energia v ňom sa premiestňuje tak, ako sa šíri lokalizovaná vlna. Ak si predstavíme, že energia je v istom zmysle podobne ako hmotnosť rozložená v priestore, potom môžeme zaviesť pojem (objemovej) hustoty energie $e(x,t)$ tak, že energia akumulované v oblasti medzi x_1 a x_2 je daná vzťahom

$$E(x_1,x_2) = A\int_{x_1}^{x_2} dx e(x,t), \tag{51}$$

kde A je plocha prierezu pružnej tyče, v ktorej sa vlnenie šíri. Zákon zachovania energie bude potom bilančná rovnica v tvare

$$\frac{dE(x_1,x_2)}{dt} = I(x_1,t) - I(x_2,t), \tag{52}$$

ak sa vlna šíri doprava, kde $I(x,t)$ predstavuje *tok energie* cez plochu A do uvažovanej oblasti v mieste x.

Takúto rovnicu môžeme naozaj dostať priamo z vlnovej rovnice, pričom pre hustotu energie nájdeme

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{53}$$

a pre tok energie

$$I(x,t) = -\rho v^2 A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v e(x,t)A, \tag{54}$$

kde posledná rovnosť platí pre doprava (+) alebo doľava (-) šíriacu sa vlnu.

Stredný tok energie. Pre hustotu energie doprava šíriacej sa harmonickej vlny $u(x,t) = u_0\cos(\omega t - kx)$ nájdeme

$$e(x,t) = \rho\omega^2 u_0^2(\cos(\omega t - kx))^2, \tag{55}$$

ktorej stredná hodnota v čase (ustrednením cez periódu kmitania) je

$$\langle e\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt e(x,t) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_0^2, \tag{56}$$

ktorá nám vyjadruje množstvo energie uloženej v harmonickej vlne na jednotku objemu.

Z tohto pomocou vzťahu (54) nájdeme, že stredné množstvo energie, ktoré prejde jednotkovou plochou tyče za jednotku času je

$$j_e = v\langle e\rangle = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 u_0^2. \tag{57}$$

Vidíme, že hoci materiál tyče ostáva na svojom mieste, dokážeme vlnením premiestňovať energiu v presne merateľnom množstve pomocou pojmu hustoty stredného toku energie.

Ekvivalentné vyjadrenia môžeme nájsť použitím vzťahov platných pre vlny v pružnej tyči:

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad v^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{58}$$

Odvodenie rovníc (53) a (54):

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \Big|\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \int_{x_1}^{x_2} dx & (59)\\
\int_{x_1}^{x_2} dx\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{x_1}^{x_2} dxE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} & (60)\\
\int_{x_1}^{x_2} dx\rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 &= \left[E\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dxE\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & (61)\\
\int_{x_1}^{x_2} dx\rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \int_{x_1}^{x_2} dxE\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \left[E\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_1}^{x_2} & (62)\\
\int_{x_1}^{x_2} dx\rho\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \int_{x_1}^{x_2} dxE\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &= \left[E\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_1}^{x_2} & (63)\\
\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{x_2} dx\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \int_{x_1}^{x_2} dx\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) &= \left[\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_1}^{x_2} & (64)\\
\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} dxe(x,t) &= -I(x_2,t) + I(x_1,t), & (65)
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
e(x) &= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & (66)\\
I(x,t) &= -\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}. & (67)
\end{aligned}$$

Všeobecná doprava idúca vlna má tvar $u(x-vt)$, a teda platí

$$\frac{\partial}{\partial t}u = -v\frac{\partial}{\partial x}u, \tag{68}$$

z čoho nájdeme,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 & (69)\\
&= -v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & (70)
\end{aligned}$$

Posledný výraz teda môžeme napísať aj v tvare (vynásobený s ρ)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{v} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - v \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \tag{71}$$

čo pomocou vzťahu pre rýchlosť šírenia vĺn, $v^2 = E/\rho$, nadobudne konečný tvar

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{v} e(x,t). \tag{72}$$

Tým sme dokázali všetky tvrdenia uvedené v súvislosti s energetickou bilanciou vlnenia v rovnici (52).

1.7 Vlny v 3D

Vo celej doterajšej diskusii sme sa venovali šíreniu vĺn v jednom rozmere - pozdĺž osi x.

Podobne v trojrozmernom priestore sa tiež môžu šíriť vlny len v jednom smere - takéto vlny nazývame rovinné a vyznačujú sa tým, že ich fáza (alebo všeobecne amplitúda pre vybraný čas) je nemenná pre body ležiace v rovnie. Tak napríklad vlna

$$u(x,y,z;t) = u_0 \cos(\omega t - kx) \tag{73}$$

predstavuje rovinnú vlnu, pre ktorá nadobúda tú istú amplitúdu pre všetky body v priestore s identickou súradnicou x

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad y \in (-\infty, \infty), \quad z \in (-\infty, \infty). \tag{74}$$

Pre inú súradnicu x bude amplitúda iná, ale opäť rovnaká pre všetky body ležiace v rovine kolmej na os x. Rovinná vlna sa teda šíri v smere kolmom na rovinu, v ktorej nadobúda všade rovnakú hodnotu pre daný okamžik času.

Vo všeobecnosti je rovina daná svojím normálovým vektorom $\vec{n}$. Rovinnú vlnu šíriacu sa v smere kolmom na rovinu danú svojím normálovým vektorom potom môžeme zapísať v tvare

$$u(\vec{r},t) = u_0 \cos(\omega t - k\vec{n} \cdot \vec{r}), \tag{75}$$

pretože pre každé dva body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$, ktoré ležia v takejto rovine, platí

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0, \tag{76}$$

a preto $u(\vec{r}_1,t) = u(\vec{r}_2,t)$. Zavádzame potom *vlnový vektor*

$$\vec{k} = k\vec{n}, \tag{77}$$

ktorého veľkosť je daná vlnovým číslom vlny (a teda jej vlnovou dĺžkou) a smer udáva smer šírenia sa rovinnej vlny v priestore.

Samotná vlnová rovnica nadobúda v najjednoduchších prípadoch tvar, ktorý je priamočiarym zovšeobecnením vlnovej rovnice z 1D, rovnice (10),

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,y,z;t) = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(x,y,z;t). \tag{78}$$

Nakoľko súčet druhých derivácií sa vo fyzike a technike vyskytuje mimoriadne často, tak sa preň zaviedol samostatný znak a názov: *Laplaceov operátor*,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x,y,z;t)=\Delta u(x,y,z;t), \tag{79}$$

a vlnová rovnica v 3D nadobudne sympatický tvar

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=v^2\Delta u. \tag{80}$$

Je užitočným cvičením sa presvedčiť, že rovinná vlna v tvare

$$u(\vec{r},t)=u_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})=u_0\cos(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z) \tag{81}$$

spĺňa rovnicu (78) pod podmienkou že $v^2=\omega^2/|\vec{k}|^2$.

Vlnovú rovnicu možno prepísať z kartézskych súradníc (x,y,z) do sférických (r,ϕ,θ), v ktorých možno nájsť aj iné riešenie ako rovinné vlny, napr. tzv. guľové vlny, ktorých tvar tu len pre predstavu uvedieme

$$u(r,\phi,\theta;t)=\frac{u_0}{r}\cos(\omega t-kr), \tag{82}$$

ktorá má konštantnú fázu, a teda aj výchylku pre vybraný čas na guľových plochách, $r=const$ a ϕ a θ sú ľubovoľné.