Príklady k tlmeným kmitom z Fyziky 1.

Peter Bokes

14/4/2011

0.1 Tlmené kmity

Príklad 1. Výchylka tlmených kmitov má všeobecný tvar $x(t) = A\exp\{-\beta t\}\cos(\omega t+\phi)$, $\beta < \omega$. Nájdite fázu ϕ a amplitúdu A tak aby počiatočná výchylka bola x_0 a počiatočná rýchlosť $v_0 = 0$.

Výsledok: $\phi = -\mathrm{atan}\{\beta/\omega\}, A = x_0\sqrt{1+(\beta/\omega)^2}$.

Postup:

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\phi) && (1)\\
\dot{x}(t) &= -\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\phi) - Ae^{-\beta t}\omega\sin(\omega t+\phi) && (2)\\
x(0) &= A\cos(\phi) && (3)\\
v_0 &= 0 = \dot{x}(0) = -\beta A\cos(\phi) - \omega A\sin(\phi) && (4)\\
&\rightarrow \tan(\phi) = -\beta/\omega && (5)\\
&\rightarrow \cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\phi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\beta^2/\omega^2)}} && (6)\\
&\rightarrow A = x_0/\cos(\phi) = x_0\sqrt{1+\beta^2/\omega^2} && (7)
\end{aligned}$$

Príklad 2. Hľadaním extrému funkcie sa presvedčte, že vyššie nájdený časový vývoj výchylky nadobúda lokálne extrémy pre časy $t_e = 0, T/2, T, ...nT/2....$

Postup:

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) && (8)\\
\dot{x}(t) &= -\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) - Ae^{-\beta t}\omega\sin(\omega t - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}$$

Extrém:

$$\begin{aligned}
0 &= -\beta Ae^{-\beta t_e}\cos(\omega t_e - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) - Ae^{-\beta t_e}\omega\sin(\omega t_e - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) && (11)\\
0 &= \beta\cos(\omega t_e - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) + \omega\sin(\omega t_e - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) && (12)\\
& \tan(\omega t_e - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) = -\beta/\omega && (13)\\
& \omega t_e - \mathrm{atan}(\beta/\omega) + n\pi = -\mathrm{atan}(\beta/\omega) && (14)\\
t_e &= \frac{n\pi}{\omega} = \frac{nT}{2} && (15)
\end{aligned}$$

Príklad 3. Aký jej dolné ohraničenie koeficientu útlmu ak pred druhým prechodom rovnovážej polohy bola veľkosť výchylky maximálne $x_0/2$? (Uvažujte počiatočné podmienky z Príkladu 1).

Postup: Kritická situácia keď je presne rovná $x_0/2$:

$$x(T/2) = x_0\sqrt{1+\beta^2/\omega^2}e^{-\beta T/2}\cos(\omega T/2 - \mathrm{atan}(\beta/\omega)) \qquad (16)$$

$$
\begin{aligned}
&= x_0\sqrt{1+\beta^2/\omega^2}e^{-\beta T/2}\cos((2\pi/T)T/2-\mathrm{atan}(\beta/\omega)) && (17)\\
&= x_0\sqrt{1+\beta^2/\omega^2}e^{-\beta T/2}(-1)\cos(-\mathrm{atan}(\beta/\omega)) && (18)\\
&= x_0\sqrt{1+\beta^2/\omega^2}e^{-\beta T/2}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2/\omega^2}} && (19)\\
&= x_0 e^{-\beta T/2} && (20)\\
\rightarrow \ln(x(T/2)/x_0) &= -\beta T/2 && (21)\\
\ln(1/2) &= -\beta T/2 \rightarrow \beta = \frac{2\ln 2}{T} && (22)
\end{aligned}
$$

a teda výsledok je $\beta \geq \frac{2\ln 2}{T} = 2\ln 2\frac{2\pi}{\omega}$.