Skúška 2.7.2013

Teória bez odvodení. Všetky použité písmenká slovne popíšte. Každá otázka je za 4 body.

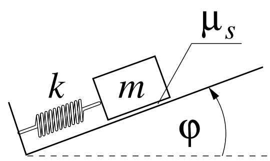
1. Sformulujte 2. Newtonov zákon pre pohyb hmotného bodu a uveďte príklad, ako by ste zmerali veľkosť pôsobiacej sily na teleso, ktoré sa pohybuje so zrýchlením.
2. Zaveďte pojem okamžitého výkonu a napíšte jeho vyjadrenie pomocou pôsobiaceho vektora sily a vektora rýchlosti pôsobiska tejto sily. Uveďte príklad situácie keď je výkon nulový, hoci veľkosť pôsobiacej sily aj rýchlosť telesa, na ktoré táto sila pôsobí, budú nenulové.
3. Zaveďte pojem vektora momentu sily a uveďte jeden príklad úlohy, kde sa táto veličina využíva.
4. Ako sa definuje polohový vektor ťažiska systému N hmotných bodov, ktoré sú dané polohovými vektormi $\vec{r}_i$ a hmotnosťami m_i? Majme hmotné body s rovnakými hmotnosťami vo vrcholoch pravouhlého trojuholníka. Vrchol trojuholníka pri pravom uhle je v počiatku súradníc, strana s dĺžkou a leží na osi x a druhá strana leží na osi y. Aká bude x-ová súradnice ťažiska týchto troch bodov?
5. Sformulujte rovnicu kontinuity pre nestlačiteľnú kvapalinu pomocou plochy prierezu potrubia a rýchlosti prúdenia kvapaliny v ňom. Prečo neplatí pre stlačiteľnú kvapalinu či plyn?
6. Ako sa definuje mólová tepelná kapacita plynu pri konštantnom objeme? Ako súvisí s vnútornou energiou v prípade ideálneho plynu?

Otázka s odvodením (8 bodov):

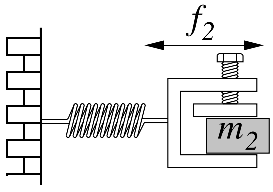
Napíšte pohybovú rovnicu tlmeného harmonického oscilátora a nájdite jej riešenie pomocou hľadania riešenia v tvare $y(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\}$.

Príklady:

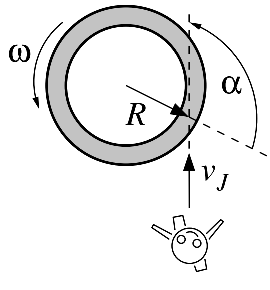
1. (5b) Na naklonenej rovine je kváder s hmotnosťou m, ktorý tlačí na harmonickú pružinu s tuhosťou k. Aká je maximálna dĺžka stlačenia pružiny $\Delta\ell_{max}$, pri ktorej bude kváder v pokoji, ak statický koeficient trenia medzi kvádrom a rovinou je μ_s? Stúpanie naklonenej roviny je dané uhlom φ.



2. (5,5b) Úchyt, ktorého hmotnosť nepoznáme, je upevnený na konci harmonickej pružiny a jeho výchylka z rovnovážnej polohy kmitá s frekvenciou f_0. Ak do úchytu upevníme teleso 1 so známou hmotnosťou m_1 bude frekvencia kmitov f_1. Keď nahradíme teleso 1 s telesom 2, frekvencia kmitov bude f_2. Aká je hmotnosť telesa 2?

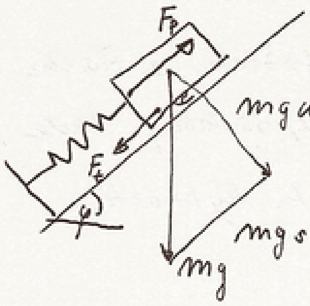


3. (6b) Voľne otáčajúci sa kolotoč s momentom zotrvačnosti J a sedačkami vo vzdialenosti R od stredu otáčania spraví jednu obrátku za čas T_0. Jožinko (hmotnosť m_J) sa rozbehne na rýchlosť v_J a naskočí na sedačku kolotoča tak, že smer jeho rýchlosti tesne pred dosadutím zviera so spojnicou stredu kolotoča a jeho sedačky uhol α. (a) Aký čas bude trvať jedna obrátka kolotoču s Jožinkom? (b) Aká veľká musí byť rýchlosť Jožinka pred dosadnutím na kolotoč, v_J, aby sa kolotoč s ním otáčal rýchlejšie ako na začiatku?



4. (5,5b) Vzduch v pieste pri teplote T_1 (stav 1) najprv izotermicky stlačíme na polovičný objem (stav 2) a následne ho necháme adiabaticky expandovať na tlak rovnaký ako v stave 1 (stav 3). Aká bude teplota vzduchu v stave 3? Zaznačte všetky spomínané procesy v $p-V$ diagrame. Pomer tepelných kapacít vzduchu pri konštantnom tlaku a pri konštantnom objeme, $\varkappa = 7/5$, poznáme.

Pr 1



rozklad sily 1b

rovnováha:

pružina, trecia sila

$$0 = F_p - mg\sin\varphi - F_t$$ 1b

$$F_p = k\Delta l$$ 1b

$$F_t \leq \mu_s mg \cancel{\sin}\cos\varphi$$ 1b

hraničná situácia

$$0 = k\Delta l_{max} - mg\sin\varphi - \mu_s mg\cos\varphi$$

$$\Delta l_{max} = \frac{mg(\sin\varphi + \mu_s\cos\varphi)}{k}$$ ✓ 1b

Pr 2

prázdny úchyt. | úchyt + m_1 | úchyt + m_2

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$$ 1b

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_0+m_1}}$$ 1b

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_0+m_2}}$$ 1b

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m_0} \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m_0+m_1} \qquad \omega_2^2 = \frac{k}{m_0+m_2}$$

"0" a "2"

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = \frac{m_0}{m_0+m_1}$$

dobré úpravy spolu 1b

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} = \frac{m_0+m_2}{m_0}$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = 1 + \frac{m_1}{m_0} \qquad = 1 + \frac{m_2}{m_0}$$

$$m_0 = \frac{m_1}{\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - 1} \qquad m_2 = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} - 1\right) m_0$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$ 1/2 b

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}} = m_1 \frac{1 - \frac{f_0^2}{f_2^2}}{1 - \frac{f_0^2}{f_1^2}}$$ 1b

Pr3

Pretože pri naskočení pôsobí Jožinko na kolotoč momentom sily a naopad, kolotoč na Jožinka, a žiadne iné moment síl na kolotoč a Jožinka nepôsobia, bude platiť zákon zachovania momentu hybnosti.

pred naskočením

1/2b

$$L = J\omega_0 + \underbrace{m_J R v_J \sin\alpha}_{1b} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

(ak chyba sin α, tak 1/2b)

po naskočení bude

$$L' = (J + m_J R^2)\omega_1 \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

1b (ak chyba $m_J R^2$ tak 1/2b)

$$L = L'$$ 1b

$$J\omega_0 + m_J R v_J \sin\alpha = (J + m_J R^2)\omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{J\omega_0 + m_J R v_J \sin\alpha}{J + m_J R^2}$$

správne úpravy 1/2b

$$\frac{T_1}{2\pi} = \frac{J + m_J R^2}{J\frac{2\pi}{T_0} + m_J R v_J \sin\alpha}$$

$$T_1 = 2\pi \frac{J + m_J R^2}{J\,{}^{2\pi}/_{T_0} + m_J R v_J \sin\alpha} = T_0 \frac{J + m_J R^2}{J + m_J R v_J \sin\alpha\, {}^{T_0}/_{2\pi}}$$

1b

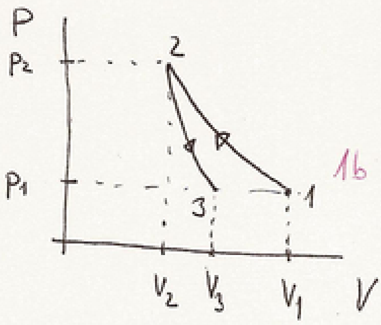
aby bola rýchlosť väčšia, musí byť $T_1 < T_0$

z výsledku vidíme, že rovnosť bude keď

$$v_J^c \sin\alpha\, {}^{T_0}/_{2\pi} = R$$ 1b

t.j. pre $v_J > v_J^c = \dfrac{2\pi R}{T_0 \sin\alpha}$ sa bude kolotoč po naskočení krútiť rýchlejšie.

Pr 4



1b

$1 \Rightarrow 2$ $\quad p_1 V_1 = p_2 V_2$ 1/2 b

$= p_2 V_1/2$

$p_2 = 2p_1$ 1b

$2 \Rightarrow 3$ $\quad p_2 V_2^{\varkappa} = p_1 V_3^{\varkappa}$ 1/2 b

$2\cancel{p_1} V_2^{\varkappa} = \cancel{p_1} V_3^{\varkappa}$

$V_3 = V_2\, 2^{1/\varkappa} = V_1 \dfrac{2^{1/\varkappa}}{2} = V_1\, 2^{1/\varkappa - 1}$ 1b

$\overset{p_1}{p_3} V_3 = nRT_3$ 1/2 b

$p_1 V_1 2^{1/\varkappa - 1} = nRT_3$ 1/2 b $\qquad p_1 V_1 = nRT_1$

$\cancel{nR} T_1\, 2^{1/\varkappa - 1} = \cancel{nR} T_3$

$T_3 = T_1\, 2^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}$ 1/2 b

pre $\varkappa = 7/5$ $\quad T_3 = 2^{-2/7} T_1 \approx 0{,}82\, T_1$