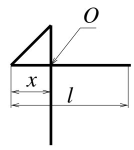
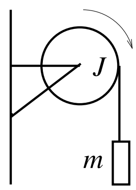
1. (4b) Dve tyče s dĺžkou l a hmotnosťou m sú pevne spojené v bode O tak, že zvierajú pravý uhol (Obr.). Ich konce sú spojené treťou (kratšou) tyčou, ktorá má rovnakú hmotnosť na jednotu dĺžky ako prvé dve tyče. V akej vzdialenosti x od konca tyčí sa musí nachádzať bod spoju O, aby sa v tomto bode nachádzalo aj celkové ťažisko týchto troch spojených tyčí?



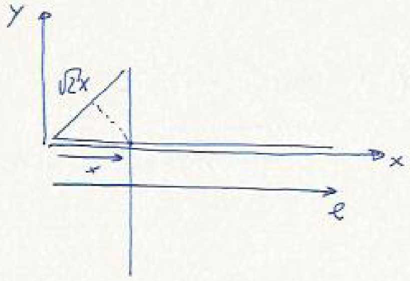
2. (3b) Nájdite výsledný moment zotrvačnosti telesa pozostávajúceho z troch tyčí z predchádzajúceho príkladu, no s predpísanou vzdialenosťou $x = l/4$. Môžete pritom využiť vzťah pre moment zotrvačnosti tyče (s dĺžkou d a hmotnosťou m) vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu jej ťažiskom, $J = (1/12)md^2$.

3. (3b) Na odvíjajúcom sa lane navinutom na kladke s polomerom R a s momentom zotrvačnosti J je uchytené závažie s hmotnosťou m. Aké bude zrýchlenie závažia? Aká je maximálna hmotnosť závažia m_{max}, pri ktorej sa lano nepretrhne? Predpokladajte, že lano sa môže pretrnúť už pri sile menšej ako mg. Hmotnosť lana považujte za zanedbateľne malú.



Riešenia s bodmi sú na naslednovných stranách.

Pr1 (4) Predpokladáme, že podľa obrázku je zvislá tyč rozdelená rovnako ako vodorovná.



hmotnosť kratšej tyče

$$m_1 = \frac{m}{l}\cdot\sqrt{2}\,x \qquad 1/2$$

x-súradnica jej ťažiska:

$$x_1 = x/2 \qquad 1/2$$

x-súradnica ťažiska vodorovnej tyče:

$$x_v = l/2 \qquad 1/2$$

x-súradnica ťažiska zvislej tyče:

$$x_{zv} = x \qquad 1/2$$

celkové ťažisko (x-súradnica):

$$x^* = \underbrace{\frac{x_1 m_1 + x_{zv} m + x_v m}{2m + m_1}}_{1/2 + 1/2} = \frac{\frac{m}{l}\sqrt{2}\,x\,\frac{x}{2} + m\left(l/2 + x\right)}{m\left(2 + \sqrt{2}\,x/l\right)}$$

podmienka príkladu:

$$x^* = x \qquad 1/2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(2 + \sqrt{2}\,x/l\right)x = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^2}{l} + x + l/2$$

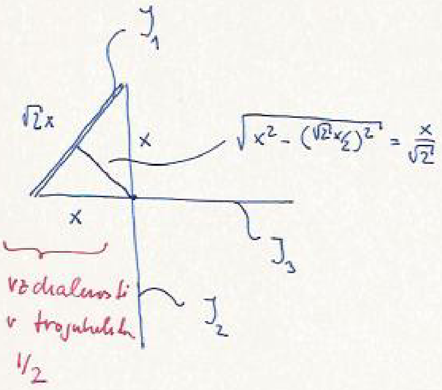
$$0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^2}{l} - x + l/2$$

⋮ lebo $x > 0$!!

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}\,l\cdot 1/l}}{-\sqrt{2}/l}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{l}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}} - 1\right)}} \qquad 1/2$$

Pr 2 3 Moment zotrvačnosti vzhľadom na os O v obrázku.



$$J_2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 \quad 1/2$$

$$= \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{1}{16}l^2$$

$$= \frac{7}{48}ml^2 \quad 1/4$$

$$J_3 = J_2 \quad 1/4$$

+1/4 boda za všeob. Steinerova veta.

$$J_1 = \frac{1}{12}m_1(\sqrt{2}x)^2 + m_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad 1/2$$

$$= \frac{1}{12}\frac{m}{\cancel{l}}\sqrt{2}\frac{\cancel{l}}{4}\cdot\left(\sqrt{2}\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{m}{\cancel{l}}\sqrt{2}\frac{\cancel{l}}{4}\cdot\left(\frac{l}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

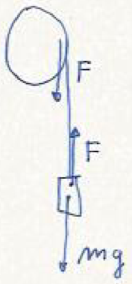
$$= \frac{1}{6}ml^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4^3} + \frac{3\cdot 1}{3\cdot 4^3}ml^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{4}{3\cdot 4^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}ml^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{48}ml^2 \quad 1/4$$

$$J = \underbrace{J_1 + J_2 + J_3}_{1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{48}\left(14+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)ml^2}}$$

Pr3 (3)

$F_{max} < mg$ – sila pri ktorej sa pretrhne lano



$$ma = mg - F \quad \tfrac{1}{2}\,b$$

$$J \underbrace{\left(\frac{a}{R}\right)}_{\varepsilon} = RF \quad \tfrac{1}{2}\,b$$

1/2 b

$$ma = mg - F$$

$$J\frac{a}{R^2} = F$$

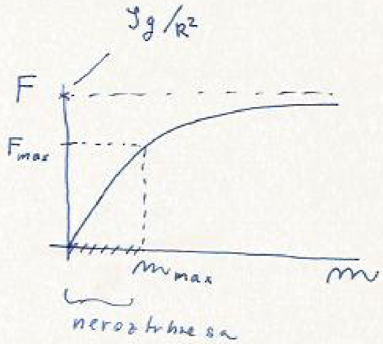
$$\left(m + J/R^2\right) a = mg$$

$$a = \frac{mg}{m + J/R^2} = \frac{g}{1 + J/(mR^2)} \quad \tfrac{1}{2}\,b$$

$$\underline{F = m(g-a)} = mg\left(1 - \frac{1}{1 + J/(mR^2)}\right) \quad 1/2$$

$$= mg\left(1 - \frac{m}{m + J/R^2}\right)$$

$$= mg\left(\frac{J/R^2}{m + J/R^2}\right)$$



$$F_{max}\left(m_{max} + J/R^2\right) = m_{max}\, g\, J/R^2$$

$$F_{max}\, J/R^2 = m_{max}\left(g J/R^2 - F_{max}\right)$$

$$m_{max} = \frac{F_{max}\, J/R^2}{g J/R^2 - F_{max}} = \underline{\underline{\left(\frac{g}{F_{max}} - \frac{R^2}{J}\right)^{-1}}} \quad \tfrac{1}{2}\,b$$