2.7 Prechod medzi súradnicovými sústavami

Konvencie

Budeme používať značenia:

- rotácia okolo 3. bázového vektora ($\vec{k}$) o uhol ϕ bude

$$\mathscr{O}^{\phi,3}[\,]$$

- Tri ortogonálne jednotkové vektory budú všeobecne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a špeciálne, v sústave natočenej spolu s študovaným tuhým telesom ako $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Aby sme nemuseli písať tri vektory, tak jednoducho budeme písať $\vec{f}_i$ alebo $\vec{e}_j$ a pod. Pripomeňme, že pre ortogonálne vektory platí

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}. \tag{50}$$

- Einsteinovo sumačné pravidlo: cez dva súčinitele majúce ten istý index sumujeme, t.j.

$$\sum_i a_i b_i \text{ budeme písať ako } a_i b_i$$

zložky vektora $c_i, i = 1,2,3$ ktoré vzniknú násobením matice

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

s zložkami iného vektora $a_i, i = 1,2,3$ budeme písať

$$c_i = M_{ij} a_j$$

kde vlastne máme 3 rovnice (pre $i = 1,2,3$) a cez j je myslené sumovanie.

Zavedenie rotácie a základné princípy

Geometricky, otočenie vektora $\vec{p}$ chápeme ako lineárne zobrazenie, v ktorom vektoru $\vec{p}$ priradíme iný vektor $\vec{q}$ pomocou predpisu

$$\vec{p} \to \vec{p}' : \vec{p}' = \mathscr{O}[\vec{p}]. \tag{51}$$

pričom veľkosť vektora ostane nezmenená, $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$.

Rotácia je lineárna operácia, t.j.

$$\mathscr{O}[\vec{p} + \vec{q}] = \mathscr{O}[\vec{p}] + \mathscr{O}[\vec{q}] \tag{52}$$

Ak chceme nájsť zložky zrotovaného vektora v báze $\vec{e}_i$ potom premietaním do týchto smerov máme

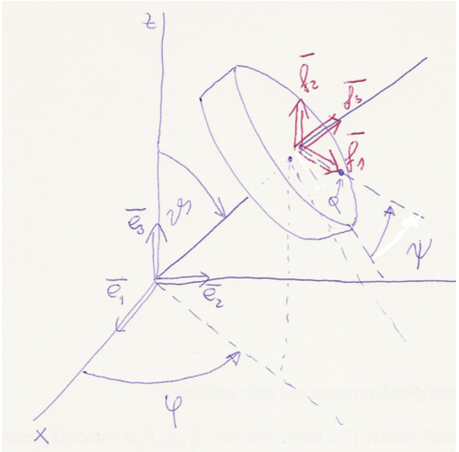
$$p_i' = \vec{p}' \cdot \vec{e}_i = \mathscr{O}[\sum_j p_j \vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i = \sum_j p_j \mathscr{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \tag{53}$$

Na cvičení sme ale našli maticu, ktorá transformuje súradnice rotovaného vektora, t.j.

$$p_i' = \sum_j R_{ij} p_j \tag{54}$$

t.j. vidíme že

$$R_{ij} = \mathscr{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \tag{55}$$



Obrázok 4: Gyroskop predstavuje zotrvačník s jedným pevným bodom. Uhly ϕ, θ, ψ sú tri Eulerove uhly typu *zyz*.

a pretože

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

platí tiež

$$\mathscr{O}[\vec{e}_j] = \sum_n \vec{e}_n R_{nj} = \vec{e}_n R_{nj}$$

(sumačná konvencia!!!), čo budeme veľmi veľa krát využívať!

Ak je rotácia otáčanie okolo $\vec{e}_3$ o uhol ϕ, t.j. $\mathscr{O}^{\phi,3}$ potom podľa cvičení

$$R_{ij} = R_{ij}^{\phi,3} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

V prípade otáčania okolo $\vec{e}_1$ alebo $\vec{e}_2$ budú prirodzene platiť podobné transformačné matice, len s permutovanými riadkami a stĺpcami:

$$R_{ij}^{\phi,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$R_{ij}^{\phi,2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{58}$$

Najčastejšie konvencie pre uhly natočenia

Nech sústava O' s bázou vektorov $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je natočená pomocou sérií rotácií vzhľadom na nehybnú sústavu O s bázou $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Sústava O' môže byť natočená ľubovoľne. Jej orientácia bude jednoznačne daná 3 uhlami ϕ, θ, ψ, tzv. *Eulerovými*, ktoré nám povedia, akými rotáciami dokážeme zorientovať sústavu O do O'. Sú viaceré konvencie, začneme s *zxz*.

1. Rotácia okolo e_3 o uhol ϕ tak aby e_1 ležal v rovine f_1, f_2

2. Rotácia okolo nového e_1 o θ tak aby nový e_2 tiež ležal v rovine f_1, f_2, alebo, čo je tomu ekvivalentné, aby e_3 bol paralelný s f_3.

3. Rotácia okolo nového $e_3 = f_3$ o ψ tak aby $e_1 = f_1$ a $e_2 = f_2$.

Z tohto je asi zrejmé, aká konvencia je zyz. V technických aplikáciach (roboty, lietadlá, satelity) sa ešte zvykne používať aj konvencia "Roll-Pitch-Yaw"(xyz) ktorá predstavuje zorientovanie špicu pôvodne v smere x (Yaw) otočením okolo z, nastavením stúpania (Pitch) otočením okolo novej osi y a nakoniec pootočenie okolo osi lietadla (roll) okolo novej osi x.

Vektor uhlovej rýchlosti pre gyroskop v sústave pevne spojenej s gyroskopom.

Celková uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa pri zmene Eulerových uhlov zyz je daná súčtom troch vektorov uhlových rýchlostí patriacich k jednotlivým otáčaniam:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\psi}}. \tag{59}$$

Každý z nich je zavedený v inak zrotovanej sústave;

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\phi}} &= \dot{\phi}\vec{e}_3, \\ \dot{\vec{\theta}} &= \dot{\theta}\vec{e}'_2, \\ \dot{\vec{\psi}} &= \dot{\psi}\vec{e}''_3. \end{aligned} \tag{60–62}$$

Pre počítanie s vektorom uhlovej rýchlosti v 2. pohybovej rovnici si ich musíme všetky vyjadriť v sústave pevne spojenej s gyroskopom.

Všeobecne, i-ty bázový vektor $\vec{f}_i$ vznikne rotáciami bázového vektora $\vec{e}_i$;

$$\vec{f}_i = \mathscr{T}^{\phi,\theta,\psi}[\vec{e}_i]. \tag{63}$$

Po častiach:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i &= \mathscr{O}^{\phi,3}[\vec{e}_i] = \sum_j R^{\phi,3}_{ji}\vec{e}_j = R^{\phi,3}_{ji}\vec{e}_j \qquad (64) \\ \vec{e}''_i &= \mathscr{O}^{\theta,2}[\vec{e}'_i] = \ldots \qquad (65) \\ \vec{f}_i &= \mathscr{O}^{\psi,3}[\vec{e}''_i] \qquad (66) \end{aligned}$$

Je dôležité si uvedomiť že v rôznych riadkoch ide o rotácie okolo rôznych osí “3” a “3”. Analogicky máme aj inverzné vzťahy:

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \mathscr{O}^{-\phi,3}[\vec{e}'_i] \qquad (67) \\ \vec{e}'_i &= \mathscr{O}^{-\theta,2}[\vec{e}''_i] \qquad (68) \\ \vec{e}''_i &= \mathscr{O}^{-\psi,3}[\vec{f}_i] \qquad (69) \end{aligned}$$

Ukážeme si prechod pre smer $\vec{e}_3$ vystupujúci vo vektore $\dot{\vec{\phi}}$, čo je aj najzdĺhavejší výpočet,

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \vec{e}'_3 = \mathscr{O}^{-\theta,2}[\vec{e}''_3] = \sum_i \vec{e}''_i R^{-\theta,2}_{i3} \qquad (70) \\ &= \sum_i \mathscr{O}^{-\psi,3}[\vec{f}_i] R^{-\theta,2}_{i3} = \sum_{i,j} \vec{f}_j R^{-\psi,3}_{ji} R^{-\theta,2}_{i3}. \qquad (71) \end{aligned}$$

Poslednú rovnicu s dvomi sumami vieme prepísať pomocou maticového násobeni,

$$\vec{e}_3 = \left[\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right] \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta \\ 0 \\ c\theta \end{bmatrix} \tag{72}$$

$$\vec{\dot{\phi}} = -c\psi s\theta\dot{\phi}\vec{f}_1 + s\psi s\theta\dot{\phi}\vec{f}_2 + c\theta\dot{\phi}\vec{f}_3 \quad (73)$$

alebo pre vektor $\vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\vec{e}_2'$

$$\begin{aligned} \vec{e}_2' \cdot \vec{f}_j &= \sum_l R_{jl}^{-\psi,3} R_{l2}^{-\theta,2} && (74) \\ \vec{\dot{\theta}} &= s\psi\dot{\theta}\vec{f}_1 + c\psi\dot{\theta}\vec{f}_2. && (75) \end{aligned}$$

Nakoniec napíšme vektor zodpovedajúci otáčaniu okolo uhla ψ čo je jednoducho

$$\vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\vec{f}_3. \quad (76)$$

Celková uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa pri zmene Eulerových uhlov bude potom (pomocou výsledkov 76,75,76)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -c\psi s\theta\dot{\phi} + s\psi\dot{\theta} && (77) \\ \omega_2 &= s\psi s\theta\dot{\phi} + c\psi\dot{\theta} && (78) \\ \omega_3 &= c\theta\dot{\phi} + \dot{\psi}. && (79) \end{aligned}$$

2.8 Eulerove pohybové rovnice gyroskopu: otáčanie okolo pevného bodu

Uvažujme prípad otáčania telesa okolo jedného pevného bodu, rôzneho od ťažiska (aby gravitačné sily spôsobili nenulový moment síl). Potom inerciálny člen v 2. pohybovej rovnici i.t.t. (27) môžeme potom napísať v sústave pevne spojenej s i.t.t. a orientovanej tak, že tenzor zotrvačnosti je v nej diagonálny, v tvare

$$\frac{d}{dt}(\sum_i \vec{f}_i I_i \omega_i) = \sum_j D_j \vec{f}_j, \tag{80}$$

pričom tenzor zotrvačnosti v sústave pevne spojenej s gyroskopom je

$$\overleftrightarrow{I} = I(\vec{f}_1\vec{f}_1 + \vec{f}_2\vec{f}_2) + J\vec{f}_3\vec{f}_3, \tag{81}$$

t.j. v rovnici (80) je $I_1 = I, I_2 = I$ a $I_3 = J$. Pretože jednotkové vektory $\vec{f}_i$ sa otáčajú, platí pre ne

$$\frac{d}{dt}\vec{f}_i = \vec{\omega} \times \vec{f}_i,$$

čo vedie na

$$\sum_i \left(\vec{f}_i I_i \dot{\omega}_i + \vec{\omega} \times \vec{f}_i I_i \omega_i\right) = \sum_j D_j \vec{f}_j \tag{82}$$

prenásobením postupne skalárne s $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ dostaneme 3 Eulerove pohybové rovnice otáčajúceho sa i.t.t.

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(J-I) &= D_1 &(83)\\ I\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I-J) &= D_2 &(84)\\ J\dot{\omega}_3 + \omega_2\omega_1(I-J) &= D_3, &(85)\end{aligned}$$

t.j. systém troch *nelineárnych* diferenciálnych rovníc ktoré musíme riešiť spolu s tromi *nelineárnymi* diferenciálnymi rovnicami pre Eulerove uhly popisujúce orientáciu i.t.t., (77), (78) a (79). Toto predstavuje druhý systém 6 nelineárnych diferenciálnych rovníc. Táto cesta je v jednoduchých prípadoch užitočná, ale vidíme že musíme najprv nájsť $\omega_i(t)$, t.j. spočítať funkcie, ktoré vlastne nepotrebujeme. Naviac, čím z viacerých i.t.t. sa bude robot či manipulátor skladať, tým viac nepotrebných funkcií musíme spočítať. Tento problém obchádza prístup pomocou Lagrangeových rovníc ku ktorému sa čoskoro dostaneme, a v rámci ktorého sformulujeme aj pohybové rovnice gyroskopu a pár manipulátorov.

Špeciálne prípady pohybu gyroskopu.

Pre moment sily v homogénnom gravitačnom poli nájdeme

$$\vec{D} = r^*\vec{f}_3 \times mg(-\vec{e}_3) = mgr^*\left(c\psi s\theta \vec{f}_2 + s\psi s\theta \vec{f}_1\right), \tag{86}$$

kde $\vec{r}^* = r^*\vec{f}_3$ je polohový vektor ťažiska gyroskopu vzhľadom na pevný bod (kĺb) gyroskopu, takže pohybové rovnice pre gyroskop budú

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(J-I) &= mgr^* s\psi s\theta &(87)\\ I\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I-J) &= mgr^* c\psi s\theta &(88)\\ J\dot{\omega}_3 + \omega_2\omega_1(I-J) &= 0 &(89)\\ \omega_1 &= -c\psi s\theta\dot{\phi} + s\psi\dot{\theta} &(90)\\ \omega_2 &= s\psi s\theta\dot{\phi} + c\psi\dot{\theta} &(91)\\ \omega_3 &= c\theta\dot{\phi} + \dot{\psi} &(92)\end{aligned}$$