3.3 Lagrangeove rovnice pre sústavy i.t.t.

Odpovednie Lagrangeoveho formalizmu pre popis N ideálne tuhých telies predstavuje podobné kroky ako v prípad pre systém N hmotných bodov. Namiesto virtuálnych posunutí polohových vektorov hmotných bodov budeme uvažovať virtuálne posunutia ťažísk jednotlivých itt, $\delta\vec{r}_i^*$, a virtuálne pootočenia itt, $\delta\vec{\phi}_i = \vec{\omega}_i\delta t$. Pri virtuálnom pootočení treba zdôraniť, že malý prírastok času δt nesúvisí s reálnym priebehom času, ide len o parametrizáciu virtuálneho pootočenia pomocou vhodnáho skalárneho parametra. Tento prírastok času musí byť pri otáčaní malý aj z toho dôvodu,že pojem pootočenia možno zaviesť ako vektor len ak je toto pootočenie malé, inak nastáva problém s nekomutatívnosťou poradia otáčania okolo rôznych smerov.

Pre takto zavedené virtuálne posunutia, rešpektujúce všetky holonómne väzby v systéme, platia podobné vzťahy ako v prípade hmotných bodov (132,**??**), t.j.

$$\delta\vec{r}_i^* = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial\vec{r}_i^*}{\partial q_j}\delta q_j \tag{171}$$

$$\delta\vec{v}_i^* = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial\vec{v}_i^*}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \tag{172}$$

$$\delta\vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial\vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \tag{173}$$

Na každé itt pôsobia rôzne sily $\vec{F}_i$, sily reakcií $\vec{f}_i$, momenty síl $\vec{D}_i$ a momenty síl reakcií $\vec{d}_i$. Pre každé itt vieme redukciou presunúť všetky pôsobiská síl do jeho ťažiska a prípadne dodať potrebné momenty síl, takže výsledne nám na každé teleso pôsobia sily, či už reakcií alebo ostatné, iba v ťažisku a momenty dvojíc síl, ktorých pohybový účinok spočítame (Kapitola **??**).

D'Alembertov princíp (134) musí zahŕňať aj príspevok k práci od reakčných momentov, $\vec{d}$, ako aj síl reakcí pôsobiacich už len v ťažiskách,

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}^* + \vec{d}_i \cdot \delta\vec{\phi} \right\} = 0 \tag{174}$$

V analógii z postupom pre N hmotných bodov vyjadríme reakčné sily a momenty z pohybových rovníc itt

$$\delta W = \sum_i \left(m_i \frac{d}{dt}\vec{v}_i^* - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i^* + \left(\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega}_i \right) - \vec{D}_i \right) \cdot \delta\vec{\phi}_i = 0. \tag{175}$$

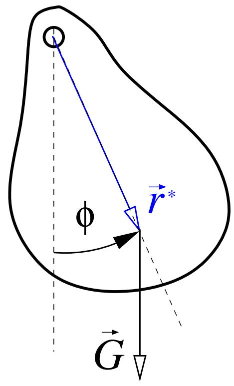
Vyjadrením virtuálnych posunutí a pootočení pomocou zmien v zobšeobecnených súradniciach a následných úpravách úplne analogickým z postupu pri hmotných bodoch nakoniec nájdeme že je vhodné zaviesť Lagrangeovu funkciu ako rozdiel celkovej kinetickej energie sústavy itt. a celkovej potenciálnej energie 125

$$L(q_1,\ldots,q_M,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_M) = \sum_i \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i^*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_i \cdot \vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega}_i - U(q_1,\ldots,q_M). \tag{176}$$

Samotné Lagrangeove rovnice sú už identické tým, ktoré sme si odvodili pre systém hmotných bodov.
Príklad: Nájdite pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla (Obr. 7) Lagrangeovou metódou, ako súradnicu uvažujte uhol výchylky od rovnovážnej zvislej polohy.

Vyjadríme si kinetickú translačnú, kinetickú rotačnú a potenciálnu energiu fyzikálneho kyvadla pomocou $\phi, \dot{\phi}$ a parametrov,

$$E_{KT} = \frac{1}{2}m|\vec{v}^*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{\vec{I}} \cdot \omega \tag{177}$$



Obr. 7: Fyzikálne kyvadlo predstavuje úlohu o otáčaní ľubovolného itt v homogénnom gravitačnom poli okolo pevnej osi mimo ťažiska telesa.

$$\vec{v}^* = \frac{d}{dt}\vec{r}^* = \frac{d}{dt}r^*\vec{e}(t) = r^*\vec{\omega}\times\vec{e}(t)r^*\dot{\phi}\vec{k} \tag{178}$$

$$|\vec{v}^*|^2 = (r^*\dot{\phi})^2 \tag{179}$$

$$E_{KR} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{I}}^*\vec{o}mega = \frac{1}{2}I^*_{zz}\dot{\phi}^2 \tag{180}$$

$$U = mg(-r^*\cos(\phi)) \tag{181}$$

Výsledná Lagrangeova funkcia potom nadobudne tvar

$$L(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + mgr^*\cos(\phi), \tag{182}$$

kde sme zaviedli označenie $I = I^*_{zz} + m(r^*)^2$. Toto vlastne predstavuje Steinerovu vetu, keď sa na kombináciu otáčania okolo osi prechádzajúcej ťažiskom a translačného pohybu ťažiska pozeráme ako na otáčanie okolo pevnej osi fyzikálneho kyvadla.

Z Lagrangeovej funkcie štandardným spôsobom nájdeme Lagrangeovu pohybovú rovnicu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow I\ddot{\phi} = -mgr^*\sin(\phi) \tag{183}$$

Táto rovnica má pre malé výchylky ($\sin(\phi)\approx\phi$) riešenie harmonické kmity,

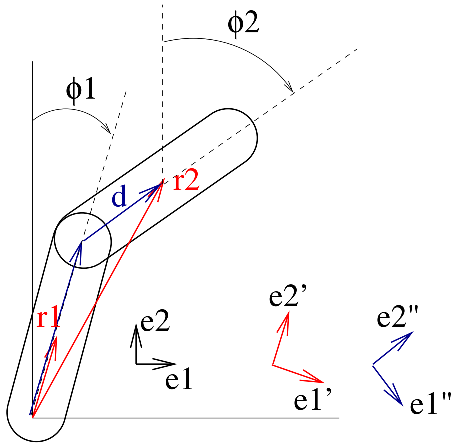
$$\phi(t) = \phi_0\cos(\Omega t+\alpha), \Omega = \sqrt{\frac{mgr^*}{I}}, \tag{184}$$

a ϕ_0 je počiatočná výchylka a α jeho počiatočná fáza.

3.4 Lagrangeova funkcia dvoj-ramenného manipulátora s rovnobežnými osami otáčania

1. Manipulátor má dva geometrické stupne voľnosti: ϕ_1, ϕ_2 ako uhly osí ramien od vertikálneho smeru (Obrázok (3.4)).

2. Označíme polohy ťažísk $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ vzhľadom na *inerciálnu sústavu*, ktorej počiatok zvolíme v bode otáčania 1. ramena. Označíme polohu osi otáčania 2. telesa vektorom $\vec{l}$ a polohu ťažiska 2. telesa vzhľadom na os otáčania 2. telesa vzhľadom na 1. teleso vektorom $\vec{d}$. Evidentne $\vec{r}_2 = \vec{l} + \vec{d}$.



Obr. 8: 2-ramenný manipulátor a v ňom použité označenia a orientácie sústav.

3. Translačná kinetická energia 1. telesa bude $\frac{1}{2}m_1|v_1|^2$ kde

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \dot{\phi}_1 \vec{e}_3' \times \vec{e}_1' r_1 = \dot{\phi}_1 r_1 \vec{e}_2' \tag{185}$$

$$|\vec{v}_1|^2 = r_1^2 \dot{\phi}_1^2 \tag{186}$$

4. Rotačná kinetická energia 1. telesa $\frac{1}{2}\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\vec{I}}_1 \cdot \vec{\omega}_1$ kde skalárny súčin vyčíslime v sústave $\vec{e}_i'$ nakoľko v tejto sú súradnice tenzora konštantné ($\vec{e}_i'$ sú pevne spojené s 1. telesom a zorientované tak, že tento tenzor je v v nich diagonálny.) Potom máme pre túto zložku energie

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2 \tag{187}$$

   kde $I_1 = \vec{e}_3' \cdot \vec{\vec{I}}_1 \cdot \vec{e}_3'$.

5. Translačná kinetická energia 2. telesa bude $\frac{1}{2}m_2|v_2|^2$ kde

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{l} + \vec{\omega}_2 \times \vec{d} \tag{188}$$

$$= \dot{\phi}_1 l \vec{e}_2' \times \vec{e}_3' + \dot{\phi}_2 d \vec{e}_2'' \times \vec{e}_3'' \tag{189}$$

$$|\vec{v}_2|^2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = l^2 \dot{\phi}_1^2 + d^2 \dot{\phi}_2^2 + 2dl \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \tag{190}$$

6. Rotačná kinetická energia 2. telesa bude podobne ako pri 1. telese jednoducho $\frac{1}{2}I_2\dot{\phi}_2^2$.

7. Kinetická energia oboch i.t.t. prejde po úpravách do tvaru

$$K = \frac{1}{2}\tilde{I}_1(\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2(\dot{\phi}_2)^2 + M\cos(\phi_1 - \phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2$$

   kde $\tilde{I}_1 = I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 l^2$, $\tilde{I}_2 = I_2 + m_2 d^2$ a $M = dlm_2$.

8. Potenciálna energia oboch i.t.t.

$$U = r_1^* m_1 g \cos(\phi_1) + (l\cos(\phi_1) + d_2\cos(\phi_2))m_2 g$$

9. Odvodiť obe Lagrangeove pohybové rovnice.