

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY**

Indukované magnetické pole v 2D nanovodičoch

Bakalárska práca

FEI-5392-56097

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY**

Indukované magnetické pole v 2D nanovodičoch

BAKALÁRSKA PRÁCA

FEI-5392-56097

Študijný program: elektrotechnika
Študijný odbor: 5.2.9 elektrotechnika
Školiace stredisko: Fakulta elektrotechniky a informatiky STU, Bratislava
Vedúci práce: Doc. Ing. Peter Bokes, PhD.

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY**

ANOTÁCIA

Autor: Simona Zajkoska

Študijný program: elektrotechnika

Názov: Indukované magnetické pole v 2D nanovodičoch

Vedúci práce: doc. Ing. Peter Bokes, PhD.

Mesiac a rok odovzdania: máj 2011

Okolo každého vodiča, ktorým preteká elektrický prúd je indukované magnetické pole. Každý dĺžkový element vodiča prispieva k celkovej magnetickej indukcii. Veľkosť magnetickej indukcie vodiča sa vypočíta superpozíciou príspevkov od jednotlivých dĺžkových elementov pomocou Biotov- Savartovho zákona. Zmena veľkosti magnetickej indukcie spôsobí zmenu energie elektrónu závislú od orientácie spinu. Zmenou veľkosti magnetickej indukcie teda môžeme ovplyvniť plošnú spinovú separáciu. Cieľom tejto práce je výpočet magnetickej indukcie v nanovodičoch elementárnych tvarov, ktorá sa využíva v prúdom indukovanej spinovej polarizácii.

**SLOVAK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY IN BRATISLAVA
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND INFORMATION
TECHNOLOGY**

ANNOTATION

Author: Simona Zajkoska

Degree Course: electrical engineering

Title of the bachelor theses: Induced magnetic field in 2D nanoconductors

Supervisor: doc. Ing. Peter Bokes, PhD.

Year of the submission: May 2011

Around every conductor, which conducts electric current a magnetic field is induced. Every differential element of this conductor contributes to overall magnetic induction. The magnitude of magnetic induction of this conductor is calculated by superposition of individual differential elements contribution, using the Biot- Savart law. The change of magnetic induction magnitude causes energy amendment of electron, depending on the spin orientation. By changing the magnetic induction magnitude we can affect the area spin separation. The aim of this work is the calculation of magnetic induction at nanoconductors of elemental shape, which is used for the current-induced spin polarization.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracovala samostatne s využitím uvedených zdrojov literatúry.

.....
Simona Zajkoska

V Bratislave, dňa

Pod'akovanie

Ďakujem doc. Ing. Petrovi Bokesovi, PhD. za ochotu a čas, ktorý mi venoval pri vypracovaní tejto bakalárskej práce.

Obsah

1	Úvod	2
2	Vznik spinovej polarizácie vplyvom prúdom indukovanej magnetickej indukcie	3
3	Výpočet magnetického poľa v okolí 2D prúdovodičov	4
4	Implementácia Biotov- Savartovho zákona pre elementárne prúdovodiče	6
4.1	Magnetická indukcia od vodiča s tvarom kruhového výseku	6
4.2	Magnetická indukcia od polonekonečnej doštičky	8
4.3	Voľba prirodzených jednotiek	10
4.4	Zoznam skratiek použitých v texte a v programe	11
5	Výsledné magnetické pole v okolí vodičov rôznych tvarov	13
5.1	Konvergencia výsledkov pre vodič tvaru kruhového výseku	14
5.2	Konvergencia výsledkov pre doštičku	17
5.3	Numerická náročnosť výpočtu	19
5.4	Výsledná magnetická indukcia	20
6	Zhrnutie výsledkov	21

1 Úvod

Spintronika (angl. spintronics) je mladý vedný odbor, ktorý sa objavil v 80. rokoch minulého storočia. Ide o oblasť elektroniky, ktorá využíva na zápis, prenos a čítanie informácií nielen náboj elektrónu ale aj jeho spin. Podstatou je orientácia spinu vzhľadom k magnetickému poľu a spinová separácia. Spintronika v súčasnosti používa najmä kovové a polovodičové materiály. Posledným hitom je orientácia na nanoštruktúry vytvorené z organických molekúl alebo uhlíkových atómov, takzvané grafény. Spintronika v kovových materiáloch už našla uplatnenie v praxi. Najrozšírenejším použitím je zápis informácií na pamäťové médiá pracujúcich na princípe javu gigantickej magnetorezistencie (GMR). Súčasný výskum spintroniky kovov je orientovaný aj na magnetický typ pamäte RAM, tzv. MRAM. Uplatnenie polovodičovej spintroniky je otázkou budúcnosti. Zatiaľ bolo navrhnutých niekoľko spinových tranzistorov, ktorých vlastnosti sú predmetom výskumu.

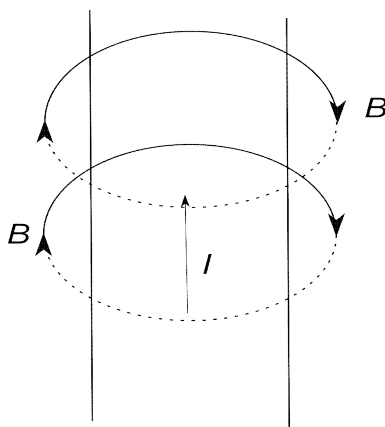
Spinový Hallov jav je jav, pri ktorom dochádza k separácii opačne spinovo polarizovaných elektrónov ku hranám vzorky, keď vzorkou preteká elektrický prúd. Tento efekt sa môže využiť v polovodičovej spintronike ku generácii polarizovaných spinov. Rozlišujeme spinový Hallov jav extrinzický a intrinzický.

Extrinzický spinový Hallov jav vzniká rozptylom na nečistotách ale aj na hrane vzorky. Príčinou tejto polarizácie je spin-orbitálna interakcia [1],[2].

Intrinzický spinový Hallov jav existuje aj bez prítomnosti nečistôt. Jednou z jeho príčin je spinovo závislá deformácia vlnových funkcií spôsobená prúdom indukovaným magnetickým poľom [3], [4]. Cieľom tejto práce je výpočet magnetickej indukcie v nanovodičoch, ktorá sa využíva v prúdom indukovanej spinovej polarizácii.

2 Vznik spinovej polarizácie vplyvom prúdom indukovanej magnetickej indukcie

Okolo každého vodiča, ktorým preteká elektrický prúd je indukované magnetické pole [5]. Smer magnetickej indukcie určíme pomocou pravidla pravej ruky: pravú ruku položíme na vodič tak, že palec ukazuje smer prúdu a zovreté prsty ukazujú smer vektora magnetickej indukcie \vec{B} . Z obr.1. vyplýva, že ak rovinným vodičom preteká elektrický prúd, magnetická indukcia pri ľavej hrane vodiča je orientovaná smerom von z papiera a naopak, magnetická indukcia pri pravej hrane vodiča je orientovaná smerom do papiera.



Obr.1 : Smer magnetickej indukcie v okolí rovinného vodiča, ktorým preteká elektrický prúd.

Príspevok k energii v dôsledku orientácie spinu v magnetickom poli je popísaný vzťahom:

$$\Delta E = -\mu_B \cdot \vec{B} \cdot \hat{\sigma} \quad (1)$$

Kde μ_B je Bohrov magnetón, $\mu_B = 5,8 \cdot 10^{-5} [eV/T]$ a $\hat{\sigma}$ je operátor spinu. Zo vzťahu (1) pre rovinný vodič vyplýva, že pri ľavej hrane vodiča pri orientácii \vec{B} smerom von z papiera sa budú hromadiť spiny so smerom \uparrow a pri pravej hrane vodiča, pri orientácii \vec{B} smerom do papiera sa budú hromadiť spiny so smerom \downarrow . Zmenou veľkosti \vec{B} teda môžeme ovplyvniť plošnú spinovú separáciu. Z veľkosti μ_B však vyplýva, že pre magneticкую indukciu s veľkosťou rádovo v [T], bude zmena energie elektrónu veľmi malá, rádovo 10^{-5} [eV]

3 Výpočet magnetického poľa v okolí 2D prúdovodičov

Elektromagnetické pole je popísané 4 Maxwellovými rovnicami. Jedna z nich vychádza z definície pre magnetický tok Φ , ktorý je definovaný ako plošný integrál vektora magnetickej indukcie B . Experimentálne bolo overené, že magnetické pole je bezzriedlové, teda platí:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Diferenciálny tvar tejto Maxwellovej rovnice (získame ho prechodom z plošného integrálu na objemový) je :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

V magnetostatike je zavedený pojem vektorového potenciálu A , pre ktorý platí:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (2)$$

Štvrtú Maxwellovu rovnicu môžeme v diferenciálnom tvare zapísať :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{resp.} \quad \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Kde \vec{j} je vektor prúdovej hustoty. Vektorový potenciál A v okolí jedného vodiča má tvar:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d^3r' \vec{j}}{|r-r'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dS' dl' j}{|r-r'|}$$

Objemový element d^3r môžeme napísať ako súčin elementu plochy dS a elementu dĺžky dl , ktorý má rovnaký smer ako vektor prúdovej hustoty j . Vzťah pre celkový prúd pretekajúci vodičom je $I=S \cdot j$. Potom v okolí jedného vodiča s ustáleným elektrickým prúdom má vektorový potenciál tvar [5]:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cdot d\vec{l}}{r}$$

Vzťah pre magnetickú indukciu v okolí jedného vodiča s prúdom získame po dosadení do rovnice (2) [6].

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \oint \frac{I \cdot d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3)$$

Rovnica (3) sa nazýva Biot- Savartov zákon: Ustálený prúd môže prechádzať iba uzavretým elektrickým obvodom, pričom každý prúdový element vodiča $I \cdot d\vec{l}$ prispieva k výslednému magnetickému poľu vo všetkých bodoch okolo vodiča. Vektor magnetickej indukcie

v ľubovoľnom bode v okolí vodiča preto získame integrovaním cez celý uzavretý obvod [5]. Každý prúdový element prispieva k celkovému magnetickému poľu čiastkou $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Výsledný vzťah pre magnetickú indukciu v okolí vodiča s prúdom (3) je superpozíciou príspevkov jednotlivých prúdových elementov. Závisí od tvaru vodiča, veľkosti prúdu a od polohy bodu v ktorom magnetickú indukciu počítame.

4 Implementácia Biotov- Savartovho zákona pre elementárne prúdovodiče

Pomocou Biotov- Savartovho zákona sme počítali magnetickú indukciu v okolí 2D vodičov. Keďže sme vzhľadom na veľkosť plošných rozmerov vodičov zanedbali ich výšku, magnetickú indukciu sme tiež počítali len v smeroch osí x a y , $\vec{B}(x, y, z = 0)$. Pre zjednodušenie výpočtov sme v programe počítali pomocou prirodzených jednotiek.

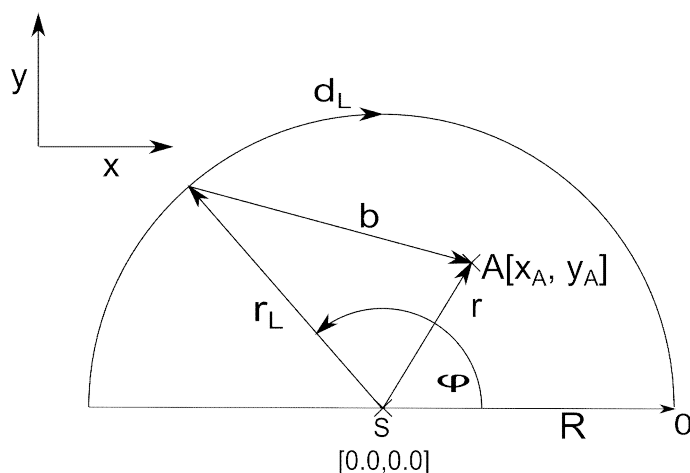
4.1 Magnetická indukcia od vodiča s tvarom kruhového výseku

Majme polkružnicový pásik konečnej šírky d s vnútorným polomerom R_i so stredom v bode $[0.0, 0.0]$, ktorým tečie celkový prúd I . Rozdelíme ho na NRV rovnakých prúdovodičov polkružnicového tvaru s polomerom R_v , pričom platí $R_v = d / (2.NRV)$.

Pri výpočte príspevku jedného polkružnicového vodiča k celkovému magnetickému poľu vychádzame z Biotov- Savartovho zákona (3). V našom prípade :

$$\vec{B}_{1V} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\pi.R}^0 \frac{I_1 \cdot d\vec{l} \times \vec{b}}{b^3} \quad (4)$$

Smery vektorov $d\vec{l}$ a \vec{b} sú znázornené na obr. 1.



Obr.1 : Polkružnicový prúdovodič s označenými polohovými vektormi

Zavedieme substitúciu pre dĺžkový element $d\vec{l} = \vec{r}_i(\varphi + d\varphi) - \vec{r}_i(\varphi) = \frac{d\vec{r}_i(\varphi)}{d\varphi} \cdot d\varphi$ (5)

kde $\vec{r}_i(\varphi) = R \cdot \cos \varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \sin \varphi \cdot \vec{j}$ (6) potom platí $d\vec{l} = -R \cdot \sin \varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \cos \varphi \cdot \vec{j}$ (7). Pre

polohový vektor platí $\vec{b} = \vec{r} - \vec{r}_i = (x_A - R \cdot \cos \varphi) \cdot \vec{i} + (y_A - R \cdot \sin \varphi) \cdot \vec{j}$ (8).

Kde x_A a y_A sú súradnice ľubovoľného bodu A v okolí polkružnicového vodiča a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú smerové vektory. Dosadením vzťahov (7) a (8) do rovnice (4) dostaneme:

$$\vec{B}_{1V} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{\pi}^0 \frac{[-R \cdot \sin \varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \cos \varphi \cdot \vec{j}] x [(x_A - R \cdot \cos \varphi) \cdot \vec{i} + (y_A - R \cdot \sin \varphi) \cdot \vec{j}]}{[(x_A - R \cdot \cos \varphi)^2 + (y_A - R \cdot \sin \varphi)^2]^{3/2}} d\varphi \quad (9)$$

Po vypočítaní vektorového súčinu z čitateľa dostaneme koncový vzťah pre výpočet magnetickej indukcie ako príspevku od jedného prúdovodiča polkružnicového tvaru v ľubovoľnom bode A.

$$B_{1V} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi \cdot R} \int_{\pi}^0 \frac{(1 - \frac{y_A}{R} \cdot \sin \varphi - \frac{x_A}{R} \cdot \cos \varphi)}{[\frac{x_A^2}{R^2} + \frac{y_A^2}{R^2} - \frac{2 \cdot x_A}{R} \cdot \cos \varphi - \frac{2 \cdot y_A}{R} \cdot \sin \varphi + 1]^{3/2}} \cdot \vec{k} d\varphi \quad (10)$$

Kde I_1 je prúd pretekajúci 1 prúdovodičom. Za predpokladu konštantnej prúdovej hustoty platí $I_1 = I / NR$. Integrál zo vzťahu (10) sme vyriešili numericky pomocou

lichobežníkového vzorca. Uhol π sme rozdelili na NUB infinitezimál a hodnotu magnetickej indukcie B sme počítali pre každý uhol $\varphi = (n \cdot \pi) / NUB$ kde $n \in \langle 0, NUB - 1 \rangle$. Vzťah pre

magneticú indukciu polkružnicového pásika dostaneme po zintegrování vzťahu (10) po celej šírke pásika d , kde R je aktuálny polomer v pásiku $R \in \langle R_i, R_i + d \rangle$. Výsledný vzťah pre magneticú indukciu od polkružnicového pásika je:

$$\vec{B}_i = \vec{B}_{1V} \cdot \int_{R_i}^{R_i+d} \frac{1}{R} dR \quad (11)$$

Zo vzťahu (10) vyplýva singularita pre magneticú indukciu polkružnicového pásika:

$$\sqrt{\left(\frac{x_A^2}{R^2} + \frac{y_A^2}{R^2}\right)} - R < R_V \quad (12)$$

Kde R je aktuálny polomer v pásiku a R_V je polomer prúdovodiča. Matematicky sa tento problém dá vyriešiť rozdelením pásika na dve zvlášť integrovateľné časti s vynechaním prúdovodiča v ktorom dochádza k singularite. V singularnom vodiči potom vynecháme symetrickú časť okolo singularity a zintegrujeme. V programe sme tento problém vyriešili pomocou konštanty ϵ . Označme menovateľ zo vzťahu (10) ako MEN , potom nerovnosť (12)

nebude splnená ak bude platiť: $MEN_{new} = \sqrt{(MEN^2 + \varepsilon^2)}$. Aby nerovnosť (12) nikdy nenastala musí pre konštantu ε platiť: $\varepsilon \geq R_V$.

K práci je priložené CD s fungujúcim programom. Pre lepšiu orientáciu v programe uvádzam v tabuľke 1 a 2 zoznam použitých skratiek.

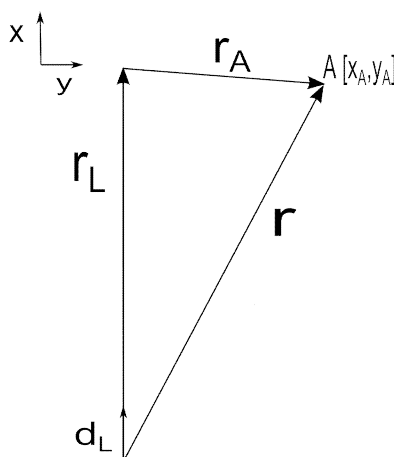
4.2 Magnetická indukcia od polonekonečnej doštičky

Majme polonekonečnú doštičku šírky d , ktorou tečie celkový elektrický prúd I , skladajúcu sa z NUB lineárnych prúdovodičov s polomerom R_V . Pri výpočte magnetickej indukcie od jedného prúdovodiča v ľubovoľnom bode priestoru $A[x_A, y_A]$ vychádzame z Biotov-

Savartovho zákona, vzťah (3). Kde $\vec{r}_l = x_l \cdot \vec{i}$, dĺžkový element $d\vec{r}_l = \frac{d r_l}{dx_l} \cdot dx_l = \vec{i} dx_l$. Pre

polohový vektor platí: $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_l = (x_A - x_l) \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}$ a pre vektorový súčin:

$d \vec{l} \times \vec{r} = y_A \cdot dx_l \cdot \vec{k}$. Na obr.2 sú zakreslené smery vektorov.



Obr.2: Označenie polohových vektorov od jedného prúdovodiča v doštičke

Dosadením týchto vzťahov do vzťahu (3) získame konečný vzorec pre výpočet magnetickej indukcie od jedného lineárneho vodiča v ľubovoľnom bode priestoru A .

$$\vec{B}_{1V} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4\pi} \cdot \int_0^l \left(\frac{y_A dx_l}{[(x_A - x_l)^2 + y_A^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \vec{k} \quad (12)$$

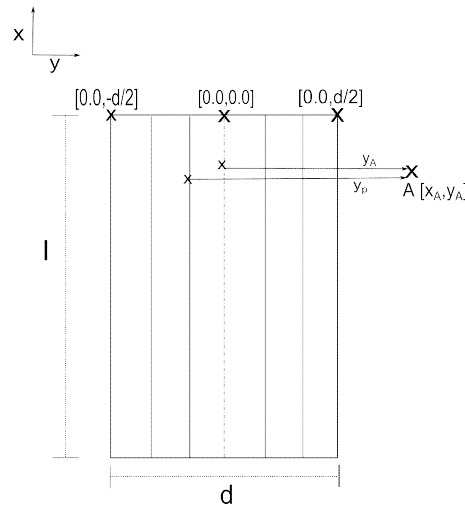
Integrál vyriešime analyticky:

$$\vec{B}_{1V} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4\pi} \left[\frac{l - x_A}{y_A \cdot \sqrt{(l - x_A)^2 + y_A^2}} + \frac{x_A}{y_A \cdot \sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \right] \quad (13)$$

Kde I_1 je prúd tečúci jedným prúdovodičom, $I_1 = I / NRV$. Pre potreby výpočtu magnetickej indukcie od celej doštičky si vyjadríme elektrický prúd tečúci infinitezimálnou šírkou pásika $dI = (I / NRV) \cdot dy_p$, kde $y_p \in \langle -d/2, d/2 \rangle$. Potom vzorec pre výpočet magnetickej indukcie od celého pásika je:

$$\vec{B}_t = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot NRV} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \left[\frac{l - x_a}{(y_A - y_p) \cdot \sqrt{(l - x_a)^2 + (y_A - y_p)^2}} + \frac{x_A}{(y_A - y_p) \cdot \sqrt{x_A^2 + (y_A + y_p)^2}} \right] dy_p \quad (14)$$

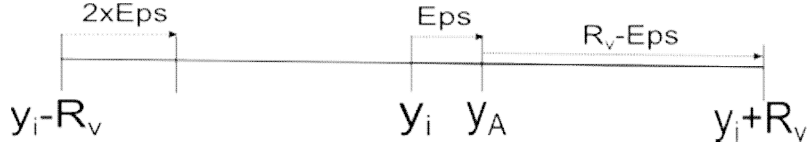
Integrál riešime numericky lichobežníkovým vzorcom pre $y_p = -(d/2) + 2 \cdot j \cdot R_v$, kde $j \in \langle 0, NRV - 1 \rangle$. Premenná y_p označuje polohu v jednotlivých prúdovodičov z ktorých je doštička poskladaná. Smery vektorov y_A a y_p sú uvedené na obr. 3.



Obr. 3: Doštička zložená z NRV prúdovodičov, y_A - vzdialenosť od stredovej osi doštičky, y_p - vzdialenosť od aktuálneho prúdovodiča

Zo vzťahu (14) vyplýva singulárny bod $y_A = y_p$. Ak by bola globálna súradnicová sústava závislá od polomeru vodiča v doštičke, singulárny bod doštičky by sa nachádzal na stredovej osi prostredného prúdovodiča. Integrál magnetického poľa sa dá rozpísať ako súčet dvoch integrálov symetrických okolo singularity y_A . V takom prípade by sme mohli singulárny vodič vynechať, pretože jeho príspevok k magnetickému poľu by bol nulový. Naša globálna súradnicová sústava je nezávislá od akýchkoľvek parametrov jednotlivých subrutín na

výpočet magnetickej indukcie od polkružnicového pásika a doštičky, preto si vodič v ktorom sa nachádza singularita musíme rozdeliť spôsobom uvedeným na obr. 4.



Obr. 4: Prúdovodič so singularitou. y_i - stred prúdovodiča, y_A - bod v ktorom počítame magneticú indukciu

Označme $\sqrt{(l-x_A)^2 + (y_A - y_p)^2} = A$ a $\sqrt{x_A^2 + (y_A + y_p)^2} = B$, potom magneticá indukcia od singulárneho vodiča sa vypočíta nasledovne:

$$B_{\text{sing}}^{\rightarrow} = C \cdot \int_{y_i - R_v}^{y_i + R_v} \left(\frac{1}{(y_A - y_p) \cdot A} + \frac{1}{(y_A - y_p) \cdot B} \right) dy_p = C_1 \cdot \int_{y_A - (R_v - \varepsilon) - 2\varepsilon}^{y_A - (R_v - \varepsilon)} \left(\frac{1}{(y_A - y_p) \cdot A} + \frac{1}{(y_A - y_p) \cdot B} \right) dy_p +$$

$$+ C_2 \cdot \int_{y_A - (R_v - \varepsilon)}^{y_A} \left(\frac{1}{(y_A - y_p) \cdot A} + \frac{1}{(y_A - y_p) \cdot B} \right) dy_p + C_3 \cdot \int_{y_A}^{y_A + (R_v - \varepsilon)} \left(\frac{1}{(y_A - y_p) \cdot A} + \frac{1}{(y_A - y_p) \cdot B} \right) dy_p$$

(15)

Druhý a tretí integrál vo vzťahu (15) sú symetrické okolo bodu y_A , preto ich príspevok k magneticému poľu je 0. Výsledný vzťah pre singulárny vodič je :

$$B_{\text{sing}}^{\rightarrow} = C \cdot \int_{y_A - (R_v - \varepsilon) - 2\varepsilon}^{y_A - (R_v - \varepsilon)} \left(\frac{1}{(y_A - y_p) \cdot A} + \frac{1}{(y_A - y_p) \cdot B} \right) dy_p \quad (16)$$

4.3 Voľba prirodzených jednotiek

Prirodzené jednotky sme zaviedli pre zjednodušenie výpočtu. Veličinu udávanú v prirodzených jednotkách prevedieme do jednotiek sústavy SI vynásobením konštantou, ktorá má rozmer jednotiek SI. Napríklad zápis pre dĺžku lineárneho vodiča v sústave SI má tvar: $l^* = l \cdot IU$, kde l je dĺžka uvedená v prirodzených jednotkách a IU je konštanta prevodu pre vzdialenosť a polohu s rozmerom [m]. Obdobne zapíšeme polohu bodu A : $x_A^* = x_A \cdot IU$, $y_A^* = y_A \cdot IU$. Využívajúc tieto vzťahy magneticá indukcia od polonekonečnej doštičky, vzťah (14) bude mať tvar:

$$\vec{B}_t = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot NRV} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \left[\frac{(l-x_a)IU}{(y_A - y_p) \cdot IU \sqrt{IU^2 \cdot [(l-x_A)^2 + (y_A - y_p)^2]}} + \frac{x_A IU}{(y_A - y_p) \cdot IU \sqrt{IU^2 \cdot [x_A^2 + (y_A + y_p)^2]}} \right] dy_p$$

Po úprave:

$$\vec{B}_t = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot NRV \cdot IU} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \left[\frac{l-x_a}{(y_A - y_p) \cdot \sqrt{(l-x_A)^2 + (y_A - y_p)^2}} + \frac{x_A}{(y_A - y_p) \cdot \sqrt{x_A^2 + (y_A + y_p)^2}} \right] dy_p$$

(15)

Pre ďalšie zjednodušenie zavedieme konštantu prevodu $BU = (\mu_0 \cdot I) / (4\pi) [N \cdot A^{-1}]$, potom zápis magnetickej indukcie doštičky v prirodzených jednotkách bude:

$$\vec{B}_t = \frac{BU}{NRV \cdot IU} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \left[\frac{l-x_a}{(y_A - y_p) \cdot \sqrt{(l-x_A)^2 + (y_A - y_p)^2}} + \frac{x_A}{(y_A - y_p) \cdot \sqrt{x_A^2 + (y_A + y_p)^2}} \right] dy_p$$

(16)

4.4 Zoznam skratiek použitých v texte a v programe

Prílohou k tejto práci je CD s fungujúcim programom. Na uľahčenie orientácie v programe uvádzam v tabuľke 1 zoznam použitých skratiek.

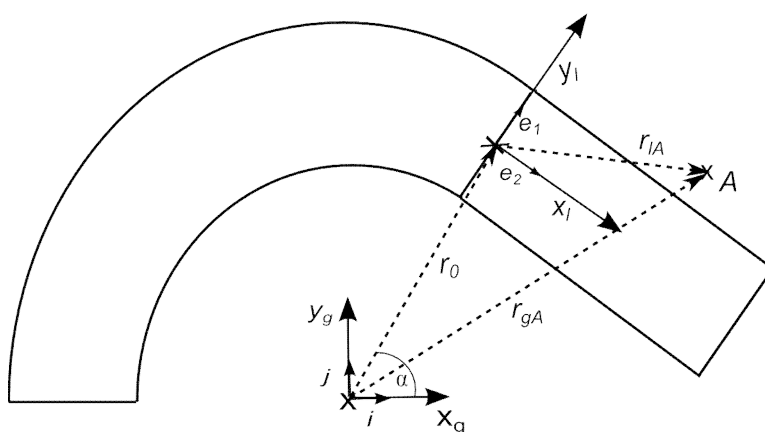
Význam	Označenie v texte	Označenie v programe
Pemeabilita vákua	μ_0	mi0
Konštanta pre singularitu kruh. výseku	ε^2	eps
Globálne súradnice	x_g, y_g	xg,yg
Súradnice stredu lok. súradnicovej sústavy doštičky v globálnej sústave		xgp1o,ygp1o
Počet bodov globálnej mriežky	Nxg.Nyg	Nxg.Nyg
Lokálne súradnice	x,y	x,y
Počet prúdovodičov	NRV	NRV
Počet infinitezimál uhla	NUB	nub
Uhol natočenia	α	alfa
Celkový prúd pretekajúci vodičom	I	prud
Polomer 1 prúdovodiča vo vodiči	Rv	Rv
Vnútorý polomer vodiča	R_i	ri
Šírka vodica	d	d
Označenie súradnice v kruhovom výseku	$\frac{x_A}{R}$	a
	$\frac{y_A}{R}$	b
Vzťah pre overenie singularity v kruhovom výseku	$\sqrt{\left(\frac{x_A}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_A}{R}\right)^2} - R$	rlocal
Aktuálny polomer v kruhovom výseku	R	$r=ri+2.n.Rv$
Ošetrenie singularity prúdovodiča v doštičke	$(y_A - y_p) \cdot A$	men1
	$(y_A - y_p) \cdot B$	men2
	$\sqrt{(y_A - y_p)^2 \cdot A^2 + \varepsilon^2}$	men1a
	$\sqrt{(y_A - y_p)^2 \cdot B^2 + \varepsilon^2}$	men2a
Vzdialenosť od stredovej osi doštičky	y_A	y
Vzdialenosť od ľubovoľného prúdovodiča v doštičke	y_p	yp

Tabuľka 1: zoznam použitých skratiek v texte a v programe

5 Výsledné magnetické pole v okolí vodičov rôznych tvarov

Pomocou nami navrhnutého postupu superpozície je možné vypočítať magnetickú indukciu v okolí vodiča ľubovoľného tvaru, ktorý vieme poskladať z lineárnych častí a častí

kružnicového oblúka. Výpočet \vec{B} od lineárnej časti- doštičky a polkružnicového pásika prebieha v samostatných podprogramoch v lokálnych súradnicových sústavách. Výsledná magnetická indukcia je tvorená súčtom príspevkov od jednotlivých častí vodiča. Na obr. 5 sú znázornené počiatky globálnej a lokálnej súradnicovej sústavy a tiež polohové vektory bodu A v týchto sústavách.



Obr. 5: Počiatky globálnej súradnicovej sústavy a lokálnej súradnicovej sústavy doštičky a polohový vektor bodu A v týchto sústavách.

Vďaka transformácii lokálnej súradnicovej sústavy doštičky cez rotačnú maticu môžeme vyskladať ľubovoľný tvar vodiča. Teda každý polohový vektor globálnej súradnicovej

sústavy $\vec{r}_{gA} = x_{gA} \cdot \vec{i} + y_{gA} \cdot \vec{j}$ vieme prepočítať na vektor v lokálnej súradnicovej sústave

doštičky \vec{r}_{lA} nasledovným spôsobom $\vec{r}_{lA} = \vec{r}_{gA} - \vec{r}_0$, kde $\vec{r}_0 = x_{r0} \cdot \vec{i} + y_{r0} \cdot \vec{j}$.

Pre súradnice lokálneho polohového vektora platí: $x_{lA} = \vec{r}_{lA} \cdot \vec{e}_2$, $y_{lA} = \vec{r}_{lA} \cdot \vec{e}_1$. Smerové vektory

lokálnej súradnicovej sústavy vyjadríme nasledovne: $\vec{e}_1 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$,

$\vec{e}_2 = -\sin \alpha \cdot \vec{i} + \cos \alpha \cdot \vec{j}$. Potom rotačná matica má tvar :

$$\begin{pmatrix} x_{lA} \\ y_{lA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{gA} - x_{r0} \\ y_{gA} - y_{r0} \end{pmatrix}$$

Kde pre súradnice vektora \vec{r}_0 platí: $x_{r_0} = (R_i + d/2) \cdot \cos \alpha$, $y_{r_0} = (R_i + d/2) \cdot \sin \alpha$.

R_i - označuje vnútorný polomer polkružnicového pásika, d je šírka vodiča a α je uhol otočenia.

Podobný princíp superpozície na výpočet indukčnosti v mikrocievkach a tranzistoroch publikoval Gao a kol. v roku 2005 [7]. Vzorka sa rozdelí na symetrické sústredné polkružnicové časti. Pomocou troch analytických vzorcov sa vypočítajú indukčnosti týchto častí, výsledná indukčnosť je daná ich súčtom.

V našej práci sme sa zamerali na výpočet \vec{B} od nanovodiča tvaru U , ktorý je tvorený 2 polonekonečnými doštičkami a polkružnicovým pásikom. Uhol otočenia je $\alpha = -\pi/2$.

5.1 Konvergencia výsledkov pre vodič tvaru kruhového výseku

Zo vzťahov pre I_l a φ vidno, že veľkosť \vec{B}_{lv} závisí od zvolených parametrov NRV a NUB .

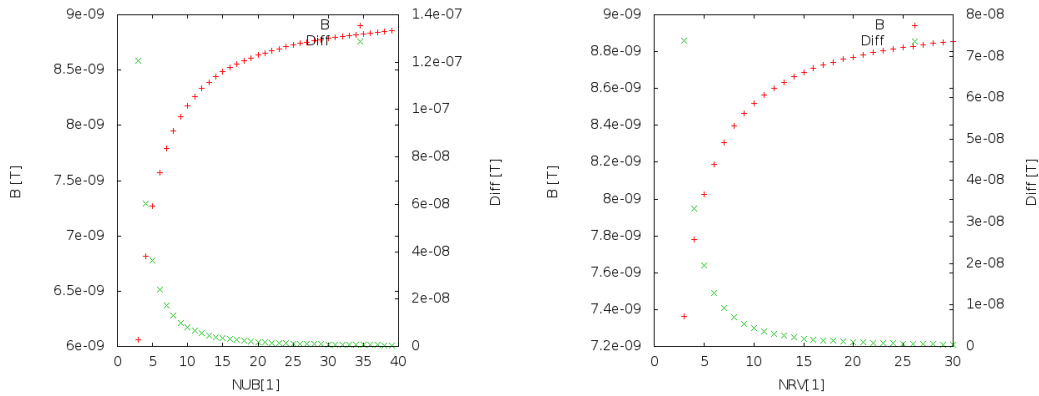
Z toho vyplýva potreba konvergence \vec{B}_l vzhľadom k týmto parametrom. Výsledok \vec{B}_l sme konvergovali v strede polkružnicového pásika $S [0.0, 0.0]$. V tomto bode nedochádza k singularite, teda výsledok \vec{B}_l závisí len od parametrov NRV a NUB a nezávisí od ε .

Najprv dokonvergujeme \vec{B}_l vzhľadom k počtu infinitezimál uhla. V bode $[0.0, 0.0]$ počítame mag. indukciu od jedného polkružnicového vodiča, pre NUB meniace sa s krokom 1.

Výsledok konverguje k správne, ak rozdiel dvoch za sebou nasledujúcich \vec{B}_l je menší ako nami zvolená presnosť. Presnosť sme zvolili o 2 rády menšiu ako je typická hodnota

\vec{B}_l v tomto bode. Pre dokonvergovaný výsledok \vec{B}_l odčítame počet infinitezimál NUB .

V rovnakom bode priestoru, pri hodnote dokonvergovaného NUB a pri rovnakej presnosti, počítame \vec{B}_l v závislosti od počtu vodičov v polkružnicovom pásiku- parameter NRV .

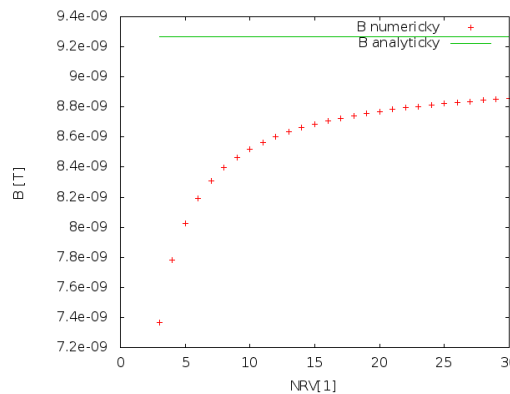


Obr.6 : Závislosť magnetickej indukcie polkružnicového pásika v bode [0.0, 0.0] od : - počtu infinitezimál uhla 1 prúdovodiča (obr. vľavo), - počtu prúdovodičov z ktorých sa doštička skladá (obr. vpravo). Diff- rozdiel 2 nasledujúcich hodnôt magnetickej indukcie.

Správnosť nášho numerického výpočtu sme overili aj analyticky. Pri odvodení analytického vzťahu magnetickej indukcie od polkružnicového vodiča v jeho strede, vychádzame z Biot-Savartovho zákona (3). Príspevok 1 polkružnicového prúdovodiča k magnetickej poľu v jeho strede je : $B_{1_{polkr}} = (\mu_0 \cdot I) / (4 \cdot R)$. Výsledný vzťah pre mag. indukciu v strede polkružnicového pásika je

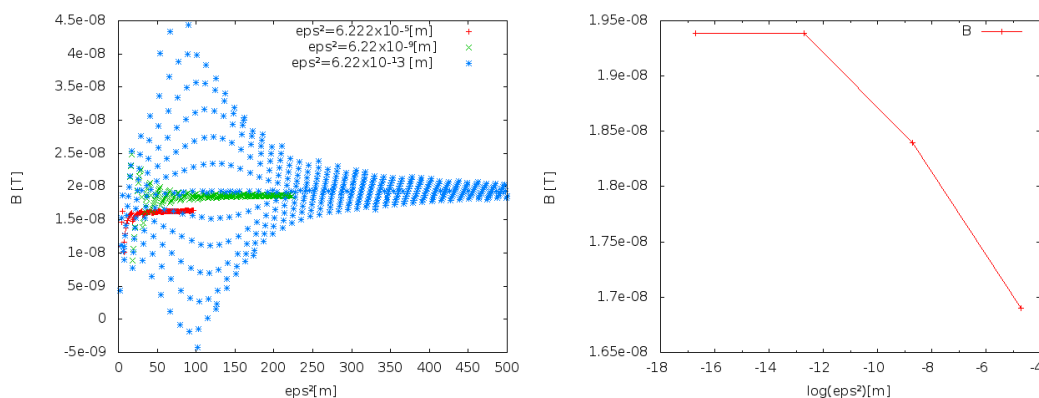
$$B_t = \int_{R_i}^{R_i+d} \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot d \cdot r} dr = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot d} \cdot \log\left(\frac{R_i + d}{R_i}\right) \quad (17)$$

Pri nami zvolenej presnosti numerického výpočtu a dokonvergovanom počte vodičov $NRV=30$, nám relatívna chyba medzi analytickou a numerickou hodnotou magnetickej indukcie v strede polkružnicového pásika vyšla 4,42%. So zväčšovaním počtu prúdovodičov sa chyba znižuje. Pri $NRV=600$ je relatívna chyba 1,7%. Na obr.7 vidíme závislosť veľkosti numerickej a analytickej vypočítanej magnetickej indukcie od počtu prúdovodičov v bode [0.0, 0.0].



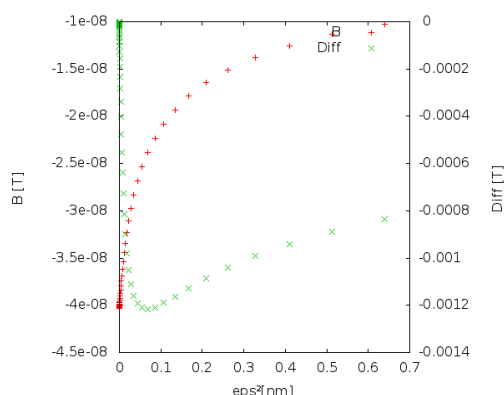
Obr. 7: Porovnanie numerickej a analytickej vypočítanej magnetickej indukcie v strede polkružnicového pásika v závislosti od počtu prúdovodičov.

Aby sme sa vyhli singularite vo vodiči s tvarom kruhového výseku zaviedli sme v programe parameter ε , pre ktorý platí $\varepsilon \geq R_V$. Konvergencia k správne výsledku magnetickej indukcie bude závisieť aj od parametru ε , čo vyplýva aj z obr. 8.



Obr. 8: Závislosť veľkosti magnetickej indukcie v bode [0,0,0,6] , pri vnútornom polomere $R_i = 0,5$ pre rôzne ε . Vľavo- veľkosť magnetickej indukcie je dokonvergovaná vzhľadom k počtu prúdovodičov pri $\varepsilon = \text{konšt}$. Vpravo- závislosť magnetickej indukcie v rovnakom bode priestoru pri dokonvergovanej hodnote počtu prúdovodičov NRV pre hodnoty ε ako v obrázku vľavo. Vynášané hodnoty ε sú v logaritmickej mierke.

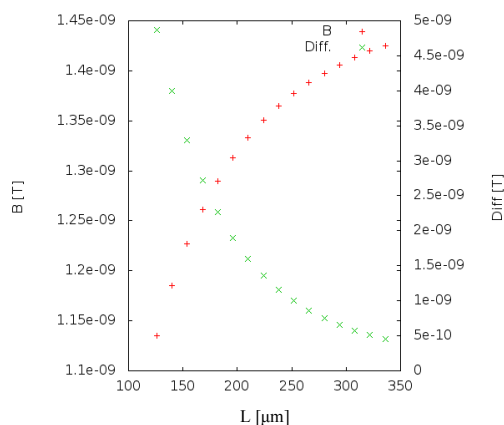
Na obr. 9 je znázornená konvergencia magnetickej indukcie od ε pri konštantnej dokonvergovanej hodnote počtu prúdovodičov, (obr.6 vpravo), v bode [0,0,0,6] , pri vnútornom polomere $R_i = 0,5$.



Obr. 9: Konvergencia magnetickej indukcie v závislosti od ε , v bode[0,0,0,6] , pri vnútornom polomere $R_i = 0,5$.

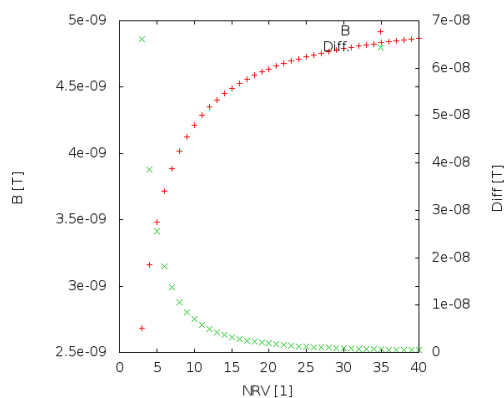
5.2 Konvergencia výsledkov pre doštičku

Zo vzťahu (14) vyplýva, že veľkosť magnetického poľa doštičky je závislá od jej dĺžky- l a počtu prúdovodičov NRV . Pri konvergencii dĺžky postupujeme nasledovne. V ľubovoľnom bode priestoru s rovnakou presnosťou ako v prípade konvergence polkružnicového pásika počítame veľkosť magnetickej indukcie jedného vodiča, pričom jeho dĺžku zväčšujeme o 0,2 násobok. Konečnú dĺžku l dosiahneme keď rozdiel dvoch za sebou nasledujúcich mag. indukcií je menší ako nami zvolená presnosť. S konvergovanou hodnotou l simulujeme polonekonečnú doštičku. Závislosť \vec{B}_i od dĺžky vodiča l je znázornená na obr.10.



Obr. 10: Konvergencia mag. indukcie polonekonečného lineárneho vodiča vzhľadom k jeho dĺžke. Diff- rozdiel 2 nasledujúcich hodnôt magnetickej indukcie.

Pri hodnote dokonvergovanej dĺžky l , v rovnakom bode priestoru a pri rovnakej presnosti počítame magneticú indukciu v závislosti od počtu prúdovodičov. Konvergencia \vec{B}_i doštičky v závislosti od NRV je znázornená na obr.11.



Obr. 11: Konvergencia veľkosti magnetickej indukcie doštičky vzhľadom k počtu prúdovodičov.

Náš numerický výpočet pre doštičku sme v priečnom priereze pri $l/2$ porovnali s numerickým výpočtom pre doštičku vyskladanú z nekonečných lineárnych vodičov. Príspevok jedného lineárneho nekonečne dlhého vodiča k celkovému magnetickému poľu je daný zákonom celkového prúdu: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ [5].

Kde \vec{j} je vektor prúdovej hustoty a integrujeme po uzavretej ploche S . Túto rovnicu riešime pre 2 prípady:

a) ak počítame magnetickú indukciu od vodiča vo vzdialenosti $r < R_V$, kde R_V je polomer

$$\text{vodiča a } r \text{ je vzdialenosť od stredu vodiča. Potom platí vzťah } B = \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot R_V^2} \cdot r$$

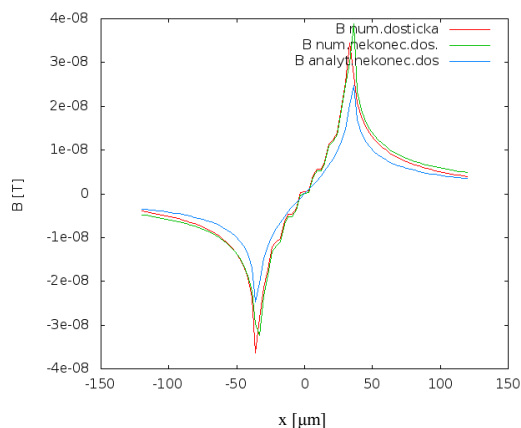
b) ak počítame mag. indukciu vo vzdialenosti $r > R_V$ je riešením vzťah $B = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Výsledný vzťah pre magnetickú indukciu nekonečnej doštičky dostaneme preintegrovaním cez všetky r , $r \in \langle R_i, R_i + d \rangle$. Integrál sme riešili numericky lichobežníkovým vzorcom. Obe naše numerické riešenia pre doštičku sme porovnali s analytickým. Analytický vzťah pre výpočet magnetickej indukcie vo vzdialenosti r od stredu doštičky je:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot j}{2 \cdot \pi} \log \left[\frac{r - d/2}{r + d/2} \right]$$

Kde j je veľkosť prúdovej hustoty a d je šírka doštičky.

Porovnanie výslednej magnetickej indukcie nekonečnej doštičky vypočítanej numericky aj analyticky s numerickým výpočtom doštičky pri konvergovanej dĺžke l vidíme na obr. 12.



Obr. 12: Porovnanie výslednej magnetickej indukcie od polonekonečnej doštičky a nekonečnej doštičky, vypočítanej v priečnom priereze pri $l/2$.

5.3 Numerická náročnosť výpočtu

V globálnej súradnicovej sústave, v ktorej prebieha superpozícia magnetickej indukcie od jednotlivých častí vodiča, sa pohybujeme s krokom 1 po mriežke, ktorá je rozdelená na $N_{xg}.N_{yg}$ bodov. Numerická náročnosť výpočtu magnetickej indukcie vodiča s tvarom kruhového výseku je priamoúmerná počtu infinitezimál uhla a počtu prúdovodičov.

$$NumNar_k = NUB.NRV_k$$

Keďže od počtu prúdovodičov NRV_k závisí polomer prúdovodiča R_V a pre ε musí platiť $\varepsilon \geq R_V$, $NumNar_k$ je nepriamo závislá aj od ε .

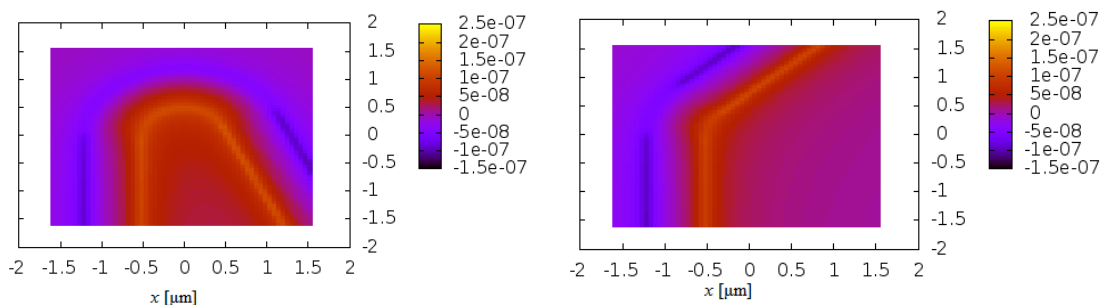
Numerická náročnosť výpočtu magnetickej indukcie doštičky je závislá len od počtu prúdovodičov NRV_d . Celková numerická náročnosť výpočtu teda výpočtový čas má tvar:

$$CelkNar = N_{xg}.N_{yg}.(NUB.NRV_k.N_k + NRV_d.N_d) \quad (18)$$

Kde N_k je počet častí vodiča s tvarom kruhového výseku a N_d je počet lineárnych častí vodiča. My sme počítali mag. indukciu pri $N_{xg}=N_{yg}=50$, ak ich však budeme zväčšovať celková numerická náročnosť a teda výpočtový čas bude kvadraticky narastať. Pri veľkých hodnotách N_{xg}, N_{yg} sa môže výpočtový čas zmenšiť tým, že budeme príspevky magnetickej indukcie k bodu v priestore počítať len v určitej kružnici s polomerom R_r . Príspevky k magnetickej indukcii v skúmanom bode by vo vzdialenosti $> R_r$ boli zanedbateľné.

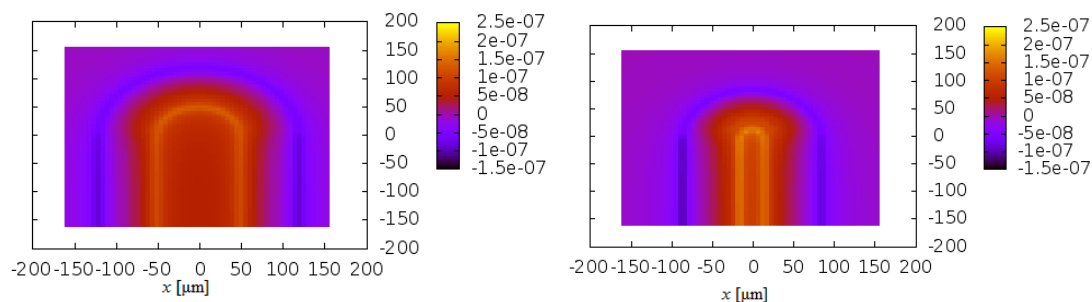
5.4 Výsledná magnetická indukcia

Navrhli sme postup superpozície, ktorý umožňuje výpočet magnetickej indukcie od jednoduchého vodiča, ktorý vznikne vyskladním z lineárnych častí a častí kruhového výseku. Na obr.13 sú príklady výslednej magnetickej indukcie od vodičov, ktorý sa skladajú z 2 lineárnych častí- doštičiek a 1 kruhového výseku.



Obr. 13: Výsledná veľkosť magnetickej indukcie od vodiča zložené z 2 doštičiek a 1 kruhového výseku: vľavo- kruhový výsek $\varphi=7\pi/8$, vpravo- kruhový výsek $\varphi=\pi/4$

Keďže sme chceli získať čo najsilnejšie magnetické pole, podrobnejšie sme sa venovali vodiču ,ktorý bol zložený z 2 doštičiek a 1 polkruhového výseku $\varphi=\pi$. Vo vnútornom záhybe sme očakávali výrazné zväčšenie magnetickej indukcie. Veľkosť záhybu sme menili pomocou zmeny vnútorného polomeru vodiča R_i (obr. 14).



Obr. 14: Výsledná magnetická indukcia pri zmene vnútorného polomeru vodiča. Vľavo: $R_i= 50 [\mu m]$
Vpravo: $R_i= 15 [\mu m]$

6 Zhrnutie výsledkov

Počítali sme magnetickú indukciu od vodiča tvaru U, ktorý sme vyskladali z 2 linárnych častí a 1 polkružnicovej. Magnetické pole okolo vodiča so šírkou $70 \mu\text{m}$ bolo indukované elektrickým prúdom $I=2,892 \cdot 10^{(-6)}\text{A}$, ktorý ním pretekal. Na základe tvaru vodiča sme predpokladali zosilnenie magnetickej indukcie v oblasti vnútorného záhybu polkružnicovej časti. Výpočet náš predpoklad potvrdil. Porovnali sme maximálne hodnoty magnetickej indukcie vo vzdialenosti $10 \mu\text{m}$ od vnútornej hrany vzorky v polkružnicovej časti a v lineárnej časti. Maximum magnetickej indukcie polkružnicovej časti bolo takmer o 60% väčšie ako maximum lineárnej časti vodiča. Oba výsledky boli rádu $10^{(-8)}$ [T]. Hodnoty týchto maxím sú radovo zhodné s hodnotami, ktoré som v rovnakej pomernej vzdialenosti od hrany vodiča odčítala z grafu pre výslednú magnetickú indukciu v diplomovej práci Lucii Kičínovej. Lucia vo svojej práci počítala spinovú polarizáciu spôsobenú prúdom indukovaným magnetickým poľom v nekonečne dlhom lineárnom vodiči. Dospela k záveru, že pri hranách vzorky magnetická indukcia s maximálnou hodnotou radovo $10^{(-8)}$ [T], spôsobila separáciu 2 elektrónov z 1 milióna. Domnievame sa, že nami vypočítaná magnetická indukcia vyvolaná prúdom rovnakej veľkosti ako v Luciinej práci, bude mať podobný vplyv na spinovú separáciu. Zmenu šírky vodiča z [μm] na [nm] dosiahneme preškálovaním prirodzených jednotiek.

Zväčšenie magnetickej indukcie môžeme doceliť zmenou tvaru vzorky, napr. mikrocievka, zväčšením prúdu a zmenšením šírky vodiča.

Lepšiu presnosť výpočtu je možné dosiahnuť zmenou integračnej metódy, zlepšením konvergencie alebo zavedením polohovo závislej prúdovej hustoty čo môže byť náplňou ďalšej práce.

Referencie

- [1] P. Bokes, F. Horváth, Phys. Rev. 81, 125302 (2010)
- [2] F. Horváth, „Spinový Hallov jav- indukcia spinovej polarizácie spin-orbitálnou interakciou“ Diplomová práca (2009)
- [3] V. Sih, R. C. Myers, Y. K. Kato, W. H. Lau, A. C. Gossard, D. D. Awschalom, Nat. Phys. 1, 31 2005.
- [4] L. Kičínová, „Spinový Hallov jav- indukcia polarizácie vnútorným magnetickým poľom“, Diplomová práca (2009)
- [5] I. Červeň, „Fyzika po kapitolách- Magnetické pole“, Vydavateľstvo STU (2007), ISBN- 978-80-227-2672-6,10,19,36
- [6] D. Ikovič, „Fyzika II“, ALFA (1970),ISBN- 63-550-70, 90
- [7] W. Gao, Ch. Jiao, Z. Yu, Int. J. of RF and Microwave Computer-Aided Engineering, DOI 10.1002/mmce, 565 (2006)